Mouvement d'une barre

Concours commun polytechnique TSI 2004

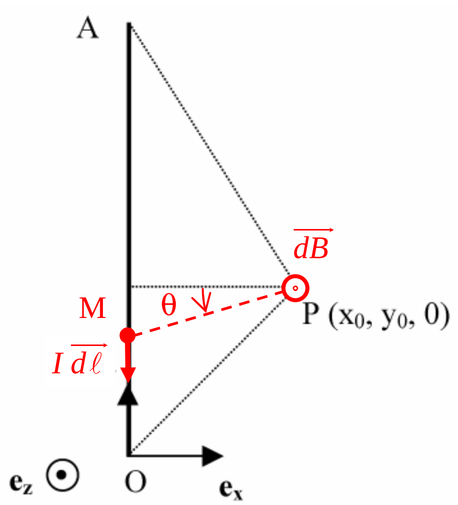
1ère partie : Champ magnétique créé par un circuit triangulaire

1. Fil rectiligne de longueur finie

a) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème d'Ampère ?

Un segment de courant ne peut en aucun cas être considéré comme enlacé : il est impossible de définir un parcours sur lequel le théorème d'Ampère puisse s'appliquer.

b) Calcul de $\vec{B}$ en utilisant la loi de Biot et Savart.



Selon la loi de Biot et Savart, le champ $\overrightarrow{dB}$ créé au point P par l'élément de courant $I\,\overrightarrow{d\ell}$ placé en M a pour expression : $\overrightarrow{dB} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\overrightarrow{d\ell}\wedge\overrightarrow{\mathrm{MP}}}{\mathrm{MP}^3}$

Avec $\overrightarrow{d\ell} = -dy\,\vec{e}_y$, $\tan\theta = \dfrac{y-y_0}{y_0}$ et $\mathrm{MP} = \dfrac{x_0}{\cos\theta}$, cela s'écrit : $\overrightarrow{dB} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\cos\theta}{x_0}d\theta\,\vec{e}_z$

En intégrant entre les valeurs extrêmes $\theta = \beta < 0$ et $\theta = \alpha$, nous obtenons :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0}\int_\beta^\alpha \cos\theta\,d\theta\,\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0}(\sin\alpha - \sin\beta)\,\vec{e}_z$$

2. Champ créé par un fil de longueur infinie. Il suffit de faire tendre β vers $-\dfrac{\pi}{2}$ et α vers $+\dfrac{\pi}{2}$, soit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi x_0}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi x_0}\,\vec{e}_z$$

3. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème d'Ampère.

Le fil infini est un axe de symétrie de la distribution de courant : en coordonnées cylindriques $(\rho,\ \varphi,\ y)$, les composantes du champ sont invariantes par rotation d'un angle φ quelconque autour de cet axe. De plus cette distribution est invariante par une translation quelconque selon l'axe Oy et il en sera de même pour les composantes du champ. Les composantes cylindriques du champ ne dépendent donc que de la distance ρ à l'axe Oy.

Enfin, le plan $(\mathrm{P},\ \mathrm{O}y)$ étant un plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en P est orthogonal est ce plan. Le champ $\vec{B}$ est donc orthoradial : $\vec{B} = B_\varphi(\rho)\,\vec{e}_\varphi$

Dès lors, en considérant pour parcours d'Ampère un parcours circulaire $(\mathcal{C})$ centré sur l'axe Oy passant par le point P (et donc de rayon $\rho = x_0$) orienté dans le sens de rotation positif autour de Oy, nous pouvons sur un tel parcours calculer la circulation du champ $\vec{B}$:

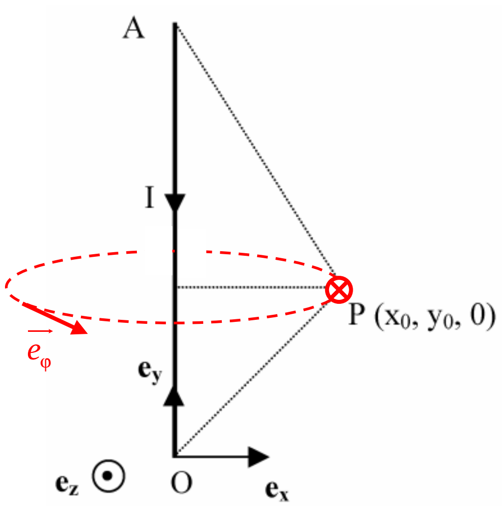
$$\oint_{(\mathcal{C})} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{d\ell} = B_\varphi(x_0)\oint_{(\mathcal{C})} d\ell = 2\pi x_0\, B_\varphi(x_0)$$

Par application du théorème d'Ampère, l'intensité enlacée étant égale à $-I$, nous obtenons :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{d\ell} = -\mu_0 I$$

Ceci donne l'expression du champ magnétique au point P pour lequel $\overrightarrow{e_\varphi} = -\overrightarrow{e_z}$:

$$\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x_0}\,\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x_0}\,\overrightarrow{e_z}$$



4. Champ magnétique au centre d'un triangle équilatéral

La distance du point C au segment AB est égale au tiers de la hauteur du triangle, soit $\rho = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6}\text{AB}$. Les angles α et β sous lesquels sont vus les points A et B ont pour valeurs $\alpha = +\frac{\pi}{3}$ et $\beta = -\frac{\pi}{3}$. Nous en déduisons que la contribution au champ du segment de courant AB a pour expression : $\overrightarrow{B_{\text{AB}}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\rho}\right)\overrightarrow{e_z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{6}\text{AB}}\right)\overrightarrow{e_z} = \frac{3\mu_0 I}{2\pi\,\text{AB}}\,\overrightarrow{e_z}$

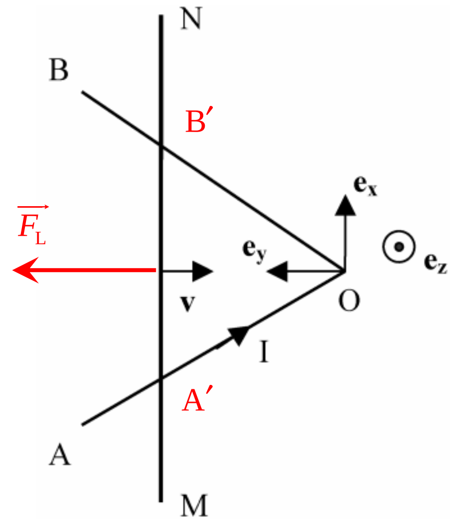
Chaque coté du triangle contribue pour une même part au champ magnétique au centre du triangle. Nous en déduisons l'expression du champ en C :

$$\overrightarrow{B_0} = \frac{9\mu_0 I}{2\pi\,\text{AB}}\,\overrightarrow{e_z}$$

2ème partie : Phénomènes d'induction

5. **a)** Résistance du circuit.

La partie $\text{A}'\text{B}'$ de la barre AB parcourue par le courant a pour longueur $\text{A}'\text{B}' = 2y\tan\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}y$ et la longueur du circuit est égale à trois fois cela. On en déduit : $R = 2\sqrt{3}\,\lambda\, y$



b) Expression du flux de $\overrightarrow{B}$.

La surface du circuit a pour expression $S = \frac{1}{2}\text{A}'\text{B}'\times\text{A}'\text{B}'\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\text{A}'\text{B}')^2 = \frac{y^2}{\sqrt{3}}$

Nous en déduisons l'expression du flux de $\overrightarrow{B}$: $\phi = \frac{y^2}{\sqrt{3}}B_0$

c) Expression de la force électromotrice.

Selon la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{y^2}{\sqrt{3}}B_0\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}B_0 y\frac{dy}{dt}$ avec ici $\frac{dy}{dt} = -V_0$: $e = \frac{2}{\sqrt{3}}B_0 V_0\, y$

d) Expression du courant induit. $I=\dfrac{e}{R}=\dfrac{B_0 V_0}{3\lambda}$

6. **a)** Expression de la force de Laplace.

Selon la loi de Laplace, la force de Laplace s'exerce sur la partie A′B′ du conducteur mobile qui est parcourue par un courant : $\overrightarrow{F_L}=I\,\overrightarrow{B'A'}\wedge\overrightarrow{B_0}$ (l'élément de courant est orienté dans le sens du courant).

$$\overrightarrow{F_L}=I\frac{2}{\sqrt{3}}\,y\,B_0\,\overrightarrow{e_y}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{B_0^2 V_0}{\lambda}\,y\,\overrightarrow{e_y}$$

b) Force exercée par l'opérateur.

Pour maintenir la vitesse constante, la somme des forces appliquées à la barre doit être nulle. L'opérateur doit donc appliquer une force opposée à la force de Laplace :

$$\overrightarrow{F}=-\overrightarrow{F_L}=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{B_0^2 V_0}{\lambda}\,y\,\overrightarrow{e_y}$$

7. Puissance. La puissance de la force exercée par l'opérateur a pour expression :

$$\mathcal{P}=\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}=\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{B_0^2 V_0}{\lambda}\,y\right)(-V_0)=\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{B_0^2 V_0^2}{\lambda}\,y$$

La puissance dissipée par effet Joule a pour valeur : $\mathcal{P}_J=R\,I^2=2\sqrt{3}\,\lambda\,y\left(\dfrac{B_0 V_0}{3\lambda}\right)^2=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\dfrac{B_0^2 V_0^2}{\lambda}\,y$

Conclusion : la puissance dissipée par effet Joule est égale à la puissance développée par l'opérateur, la conservation de l'énergie est assurée.

8. Équation différentielle du mouvement.

Il suffit d'exprimer le principe fondamental de la dynamique : $\overrightarrow{F_L}=\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\dfrac{B_0^2 V_0}{\lambda}\,y\,\overrightarrow{e_y}=m\overrightarrow{a}$

Nous en déduisons l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{B_0^2}{m\lambda}\,y\,\frac{dy}{dt}=0$$

Remarque : cette équation s'intègre, mais l'intégration n'était pas demandée.

L'équation différentielle s'écrit aussi bien $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{B_0^2}{m\lambda}\,y^2\right)=0$

Cette écriture conduit à l'intégrale première du mouvement : $\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{B_0^2}{m\lambda}\,y^2=C^{te}$

Équation qui s'écrit, compte tenu des conditions initiales : $\dfrac{dy}{dt}+V_0+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{B_0^2}{m\lambda}\left(y^2-y_0^2\right)=0$

Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparables. En posant $K=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\dfrac{B_0^2\,y_0^2}{m\lambda V_0}$, cette équation admet des solutions en $\tan\dfrac{t}{\tau}$ en champ faible $(K<1)$ et des solutions en $\tanh\dfrac{t}{\tau}$ en champ fort $(K>1)$