Premier problème : magnétostatique

* * *
Conformément à l'usage international, les vecteurs sont représentés en gras.
* * *

Ce problème examine quelques propriétés des supraconducteurs du seul point de vue de la magnétostatique. Au passage, il met en évidence celles de ces propriétés qui correspondent à celles des conducteurs parfaits. On donne $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\mathrm{H.m^{-1}}$.

I – Préliminaires

I.1 Superposition d'un champ uniforme et de celui d'un dipôle

On considère la superposition d'un champ uniforme $\mathbf{B}_a = B_a\mathbf{e}_z$ et du champ $\mathbf{B}_M$ créé par un dipôle magnétique de moment $\mathbf{M}$ placé à l'origine des coordonnées qui s'écrit, au point P repéré par ses coordonnées sphériques r, θ, φ.

$$\mathbf{B}_M(P) = \mathbf{B}_M(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{(3\mathbf{M}.\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{M}}{r^3}\right\} \text{ avec } \mathbf{r} = \mathbf{OP}.$$

$\mathbf{M}$ et $\mathbf{B}_a$ sont reliés par $\mathbf{M} = -\left(\dfrac{2\pi R^3}{\mu_0}\right) B_a\mathbf{e}_z$ où R est une longueur donnée.

1. Expliciter, pour cette valeur de $\mathbf{M}$, le champ $\mathbf{B}_R = \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_M$ en fonction de B_a, $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{r}$ et R.
2. Calculer le produit scalaire $\mathbf{B}_R.r\mathbf{e}_r$ en un point quelconque.
3. En déduire que $\mathbf{B}_R$ est tangent à la sphère de rayon R et de centre O en chacun de ses points. Où l'intensité du champ au voisinage de la sphère est-elle maximale ?
4. Donner un tracé approximatif des lignes de champ de $\mathbf{B}_R$ à l'extérieur de cette sphère.

I.2 Moment magnétique d'une distribution sphérique de courant

On considère la nappe surfacique de courant
$\mathbf{J}_s(r,\theta,\varphi) = J_0 \sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi$ si $r = R$
$\mathbf{J}_s(r,\theta,\varphi) = 0$ sinon.

1. Déterminer *a priori* la direction du champ $\mathbf{B}(0)$ créé par la distribution au centre de la sphère.
2. Calculer ce champ $\mathbf{B}(0)$. Dans la suite, on admettra que le champ créé par la distribution prend en tout point intérieur à la sphère la même valeur qu'au centre.

   Donnée : $\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = 4/3$.
3. Quel est le moment magnétique $\mathrm{d}\mathbf{M}(\theta)$ d'une tranche de la distribution de courant comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$?
4. Calculer le moment magnétique total $\mathbf{M}_s$ de la nappe de courant $\mathbf{J}_s(\mathbf{r})$.

II – Sphère supraconductrice dans un champ magnétique

L'état *supraconducteur parfait* d'un matériau, obtenu pour une température inférieure à une température critique T_c et pour une intensité du champ magnétique appliqué inférieure à une valeur critique B_c, est caractérisé par $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ en tout point intérieur.
Une sphère, remplie d'un matériau à l'état de supraconducteur parfait, est placée dans un champ magnétique $\mathbf{B}_a = B_a\mathbf{e}_z$ initialement uniforme. L'intersection de cette sphère de centre O et de rayon R avec le plan $z = 0$ est appelée cercle équatorial.

II.1 Propriétés du courant et du champ. Conséquences.

1. En utilisant la forme locale du théorème d'Ampère, montrer que, dans un supraconducteur parfait en régime stationnaire, le courant volumique est nul.
2. (a) Rappeler la relation vectorielle de continuité de la composante normale du champ **B** à la traversée d'une surface séparant deux milieux 1 et 2 (on notera $\mathbf{n}_{12}$ la normale à la surface orientée de 1 vers 2).
   (b) En déduire qu'en présence de la sphère supraconductrice (milieu 1) le champ extérieur est tangent à sa surface en chacun de ses points.
   (c) Quelle est la propriété correspondante du champ électrique au voisinage d'un conducteur ?
3. (a) Rappeler la relation vectorielle de discontinuité de la composante tangentielle du champ **B** traduisant le théorème d'Ampère au voisinage de la surface.
   (b) En déduire qu'il existe sur la surface de la sphère une nappe de courant surfacique $\mathbf{J}_s$.
   (c) Quel est le théorème d'électrostatique correspondant pour le champ électrique au voisinage d'un conducteur ?
4. On admet que le champ prend à l'extérieur de la sphère, la valeur trouvée en **I.1**.1. Exprimer $\mathbf{J}_s$ en fonction de B_a, θ, $\mathbf{e}_\varphi$.
5. En déduire le champ créé dans la sphère par cette distribution. Conclure.
6. A.N. : $B_a = 1\mathrm{T}$. Calculer $\left\|\mathbf{J}_s\left(R, \pi/2\right)\right\|$.
7. Expliciter le moment magnétique induit $\mathbf{M}_s$ acquis par la sphère supraconductrice dans le champ en fonction de $\mathbf{B}_a$ et de R.
   A.N. : calculer $\|\mathbf{M}_s\|$ pour $B_a = 1\mathrm{T}$ et $R = 1\mathrm{cm}$.

II.2 Rupture de supraconductivité. Etat intermédiaire

A température fixée, la supraconductivité cesse si la norme du champ au voisinage de la surface atteint une valeur critique $\|\mathbf{B}_c\| = B_c$. Dans l'état *normal* (non supraconducteur) le niobure d'étain se comporte comme un conducteur usuel non magnétique. Pour le niobure d'étain à 18 K, $B_c = 12{,}5T$.

1. En quel endroit de la surface se produira en premier ce phénomène ?
2. Quel est le courant surfacique critique J_c correspondant dans le niobure d'étain à 18 K ?
3. Quel est le champ $\mathbf{B}_1 = B_1\mathbf{e}_z$ maximum que l'on peut appliquer sans qu'il se produise ?
4. Pour cette valeur du champ appliqué, quel devrait être le champ au niveau du cercle équatorial si la sphère était entièrement dans l'état normal ? En déduire que pour cette valeur de B_a, la sphère ne peut pas être entièrement dans l'état normal.

5. Calculer en fonction de B_c, la valeur B_2 du champ pour laquelle cet *état intermédiaire* cesse et pour laquelle la sphère est entièrement à l'état normal.

II.3 Lévitation magnétique

Une sphère à l'état supraconducteur parfait est placée dans un champ magnétique $\mathbf{B}_a$.

1. Montrer que si le champ $\mathbf{B}_a$ est uniforme, la force résultante exercée par le champ appliqué sur les courants surfaciques est nulle.
2. On augmente le champ appliqué de $\mathbf{dB}_a$. On admet que la variation de l'énergie potentielle d'interaction du dipôle $\mathbf{M}_s = -K\mathbf{B}_a$ avec le champ s'écrit $d\varepsilon_{pm} = -\mathrm{d}\mathbf{M}_s.\mathbf{B}_a$. En déduire ε_{pm} en fonction de $\mathbf{B}_a$.
3. Le champ $\mathbf{B}_a$ n'est plus uniforme mais varie faiblement sur une distance de l'ordre de grandeur du rayon R de la sphère. Montrer par un raisonnement énergétique que cette dernière est repoussée vers les régions de plus faible champ (lévitation magnétique).