Premier problème : étude d'une machine ditherme de réfrigération

A - Performances de l'installation

A-1-1 Appliquer le premier principe de la thermodynamique à cette transformation

S'agissant d'une transformation isobare, le travail reçu a pour expression : $W_{i\to f}=-p\left(V_f-V_i\right)$ et le premier principe s'écrit donc : $\Delta U_{i\to f}=W_{i\to f}+Q_{i\to f}=-p\left(V_f-V_i\right)+Q_{i\to f}$

A-1-2 Établir la relation entre la variation d'enthalpie du système $\Delta H_{i\to f}$ et $Q_{i\to f}$

Par définition $H=U+pV$ et donc : $\Delta H=H_f-H_i=\left(U_f-pV_f\right)-\left(U_i-pV_i\right)=Q_{i\to f}$

A-2-1 Exprimer Q_F et Q_C en fonction des données : $Q_F=m\left(h_A-h_D\right)$ et $Q_C=m\left(h_D-h_B\right)$

A-2-2 Calculer Q_F et Q_C : $Q_F=+103{,}8\text{ kJ}$ et $Q_C=-162{,}2\text{ kJ}$

A-3-1 Exprimer W en fonction des données : $W=-Q_F-Q_C=m\left(h_B-h_A\right)$

A-3-2 Calculer W : $W=+58{,}4\text{ kJ}$

A-4-1 Exprimer S_F et S_C en fonction des données : $S_F=\dfrac{Q_F}{T_F}=\dfrac{m\left(h_A-h_D\right)}{T_F}$ et $S_C=\dfrac{Q_C}{T_C}=\dfrac{m\left(h_D-h_B\right)}{T_C}$

A-4-2 Calculer S_F et S_C : $S_F=+373\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ et $S_C=-554\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

A-4-3 Calculer l'entropie S_p créée au cours du cycle. Conclusion.

Pour un cycle, l'état final est identique à l'état initial et donc $\Delta S_{cycle}=0=\underbrace{S_F+S_C}_{\substack{\text{entropie}\\ \text{échangée}}}+\underbrace{S_p}_{\substack{\text{entropie}\\ \text{créée}}}$

Donc $S_p=-S_F-S_C=+180\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

Conclusion : la création d'entropie atteste qu'il s'agit d'un cycle *irréversible*.

A-5 Calculer l'efficacité μ de cette installation.

L'efficacité est définie comme le rapport de la chaleur reçue de la source froide (que l'on souhaite la plus grande possible : c'est le « bénéfice » de l'installation) au travail reçu (que l'on souhaite le plus petit possible : c'est ce que l'on va « payer »)

$$\mu=\frac{Q_F}{W}=1{,}78$$

A-6 Calculer le débit massique q_m que l'on doit imposer au fluide frogorigène.

$$q_m=m\frac{\mathcal{P}_F}{Q_F}=4{,}82\times10^{-3}\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

B – Étude de la compression de la vapeur

B-1-1 Dans l'hypothèse d'une compression adiabatique et réversible, établir la relation entre les variables T et p.

Les conditions d'application de la loi de Laplace sont réunies (le gaz est parfait, la transformation est adiabatique et réversible γ est considéré comme indépendant de la température).

Donc : $pV^\gamma=C^{te}$. Étant donnée la loi de Mariotte $\dfrac{pV}{T}=C^{te}$, nous en déduisons $\dfrac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}}=C^{te}$

B-1-2 Calculer la température T' en fin de compression : $T' = T_A \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 341,4\ \text{K}$

B-2-1 Exprimer dU en fonction de dS et dV : $dU = T\,dS - p\,dV$

Remarque : il s'agit d'une identité fondamentale pour tout fluide homogène. Cette relation définit la température thermodynamique $T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V$ et la pression thermodynamique $p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$.

B-2-2 Montrer que $pV^k = C^{te}$

Le premier principe s'écrit : $dU = \delta Q_F - p\,dV = a\,dU - p\,dV$. S'agissant d'un gaz parfait, nous pouvons écrire : $dU = C_V\,dT$, soit $C_V\,dT = a\,C_V\,dT - p\,dV = a\,C_V\,dT - \frac{nRT}{V}dV$

Il s'agit d'une forme différentielle à variables séparables qui s'écrit aussi bien : $\frac{C_V}{nR}(1-a)\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}$

Ou encore, en exprimant $\frac{C_V}{nR}$ en fonction de γ : $\frac{1-a}{\gamma-1}\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}$

Cette équation s'intègre : $\frac{dT}{T} + \frac{\gamma-1}{1-a}\frac{dV}{V} = d(\ln T) + \frac{\gamma-1}{1-a}d(\ln V) = d\left(\ln\left(V^{\frac{\gamma-1}{1-a}}T\right)\right) = 0$.

Soit : $V^{\frac{\gamma-1}{1-a}}T = C^{te}$.

Enfin, d'après l'équation d'état la température T est proportionnelle au produit pV :

$$V^{\frac{\gamma-1}{1-a}}T = C^{te} \Rightarrow V^{\frac{\gamma-1}{1-a}}pV = pV^{1+\frac{\gamma-1}{1-a}} = pV^{\frac{\gamma-a}{1-a}} = C^{te} \quad \text{cqfd}$$

B-2-3 Exprimer k en fonction de a et γ : $k = \frac{\gamma-a}{1-a}$

Note : est-il possible de répondre à la question précédente sans faire apparaître la valeur de k ?

C – Détermination des conditions de fonctionnement permettant d'obtenir l'efficacité maximale

C-1 Efficacité maximale.

L'efficacité maximale d'une machine ditherme correspond au fonctionnement selon un cycle de Carnot pour lequel les échanges thermiques se font lors de transformations isothermes réversibles, les deux transformations isothermes étant séparées par une compression et une détente adiabatiques réversibles.

C-2 Calculer les chaleurs Q'_F et Q'_C : $Q'_F = T_C\,\Delta S_C = -121,9\ \text{kJ}$ et $Q'_F = -T_F\,\Delta S_C = +115,6\ \text{kJ}$

C-3 Exprimer et calculer $\mu_{\max}$

$$\mu_{\max} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = 18,5$$