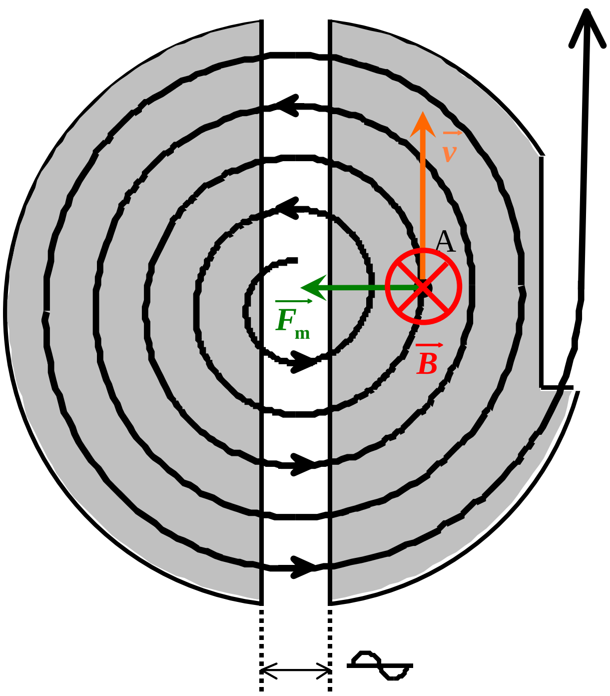
Principe de fonctionnement du cyclotron : des dés …

1. Représenter, en justifiant, au point A de la trajectoire de l'ion injecté dans le cyclotron, le vecteur vitesse $\vec{v}$ de l'ion et la force magnétique $\vec{F}_{\mathrm{m}}$ qui s'exerce sur l'ion. Représenter le champ magnétique $\vec{B}$, dans l'hypothèse où la charge q de l'ion est positive.

D'abord, on place le vecteur vitesse, tangentiel à la trajectoire, dans le sens de parcourt indiqué.

Ensuite, on indique la présence d'une force centrale centripète, nécessaire pour produire le mouvement de rotation.

Enfin, d'après le loi de force de Lorentz $\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, on en déduit que le champ magnétique est orthogonal au dé et dirigé vers l'arrière.



2. Montrer que l'action du champ $\vec{B}$ ne permet pas d'accroître l'énergie cinétique de l'ion.

La puissance développée par la force magnétique est nulle :

$$\mathcal{P} = \vec{F}_{\mathrm{m}} \cdot \vec{v} = \left(q\vec{v} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v} = 0$$

Cette force ne travaille pas et donc, selon le théorème de l'énergie cinétique, sous l'action de cette force l'énergie cinétique de l'ion ne saurait varier.

3. Démontrer que dans un « D », dans l'hypothèse où le champ magnétique est uniforme et constant, le mouvement de l'ion est circulaire uniforme et exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de m (masse de l'ion), v (module de la vitesse de l'ion), q et B.

$\vec{F}_{\mathrm{m}} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -qvB\,\vec{e}_r$. La force est centrale et de module constant (puisque v est constant). D'après le principe fondamental de la dynamique, l'accélération de l'ion est donc centrale et constante : $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}_{\mathrm{m}}}{m} = -\dfrac{qvB}{m}\vec{e}_r = -\dfrac{v^2}{R}\vec{e}_r$. Le mouvement est donc circulaire uniforme sur un trajectoire de rayon R tel que : $R = \dfrac{mv}{qB}$

4. Montrer que la durée de passage dans un demi-cylindre, notée t_{p}, ne dépend pas de v.

Le mouvement étant uniforme, le temps de passage dans un demi cylindre est égal au rapport de la longueur πR de la trajectoire par la vitesse tangentielle v.

$$t_{\mathrm{p}} = \frac{\pi R}{v} = \pi \frac{m}{qB}$$

Ce temps ne dépend pas de la vitesse v acquise par l'ion et ceci permettra la synchronisation des accélérations successives.

Pour accroître l'énergie cinétique de l'ion, on utilise l'action du champ électrique $\vec{E}$ résultant de la tension u appliquée entre les deux « D ». On considère que pendant la durée très courte de passage de l'ion d'un « D » à l'autre, la tension u reste constante.

5. Déterminer, en fonction de q et u les expressions des variations de l'énergie cinétique de l'ion lors de la traversée de l'espace entre les deux « D ».

   La particule chargée subit alors une force électrique $\vec{F_\mathrm{e}} = q\vec{E}$ considérée comme constante. Le travail de cette force est donc proportionnel à la circulation du champ électrique, laquelle définit la tension u entre les deux D. Ce travail est égal à la variation de l'énergie cinétique de la particule :

$$W = \vec{F_\mathrm{e}} \cdot \vec{\ell} = q\vec{E} \cdot \vec{\ell} = qu = \Delta\mathcal{E}_\mathrm{k}$$

6. Un ion est injecté dans la zone d'accélération avec une vitesse nulle. Quelle est sa vitesse v_1 au moment de la pénétration dans le premier « D » et quel est le rayon R_1 de la première trajectoire semi-circulaire ?

   L'énergie cinétique au moment de la pénétration dans le premier D a pour expression $qu = \frac{1}{2}mv_1^2$ et donc $v_1 = \sqrt{\frac{2qu}{m}}$.

   Le rayon de la première trajectoire semi-circulaire est donc : $R_1 = \frac{mv_1}{qB} = \sqrt{\frac{2mu}{qB^2}}$

7. Quelle doit être la fréquence d'oscillation de cette tension $u(t)$ permettant d'obtenir une accélération de l'ion à chaque passage dans l'intervalle entre les deux « D ».

   À chaque intervalle de temps t_p, le champ électrique doit être inversé et cela doit donc correspondre à une demi-période d'oscillation : $t_\mathrm{p} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2f}$ soit $f = \frac{1}{2t_\mathrm{p}}$

8. Après chaque passage dans l'intervalle entre les deux « D », la vitesse de la particule ainsi que le rayon R de sa trajectoire dans un « D » augmentent. Déterminer les suites v_k et R_k, l'indice k étant incrémenté d'une unité à chaque demi-tour.

   À chaque demi-tour, l'energie cinétique est incrémentée de la valeur qu : $\frac{1}{2}mv_k^2 = kqu$

   On en déduit $v_k = \sqrt{\frac{2kqu}{m}}$ et donc $R_k = \frac{mv_k}{qB} = \sqrt{\frac{2kmu}{qB^2}}$

9. Lorsque ce rayon finit par atteindre le rayon R_D d'un « D », l'ion est alors éjecté du cyclotron. Exprimer en fonction de m, q, B et R_D l'énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{k}$ de l'ion lors de son éjection.

   L'énergie $\mathcal{E}_\mathrm{k}$ aura pour valeur $\mathcal{E}_\mathrm{k} = kqu$ avec $R_\mathrm{D} = \sqrt{\frac{2kmu}{qB^2}}$, soit $k = \frac{qB^2R_\mathrm{D}^2}{2mu}$ et $\mathcal{E}_\mathrm{k} = \frac{q^2B^2R_\mathrm{D}^2}{2m}$

10. *Application numérique*. Calculer, en joule, puis en MeV, l'énergie cinétique $\mathcal{E}_\mathrm{k}$ d'un ion zinc Zn^{11+} (onze plus) sachant que : $B = 1{,}67\ \mathrm{T}$; $m = 1{,}06\times10^{-25}\ \mathrm{kg}$; $R_\mathrm{D} = 0{,}465\ \mathrm{m}$; $e = 1{,}60\times10^{-19}\ \mathrm{C}$.

$$\mathcal{E}_\mathrm{k} = \frac{\left(11\times1{,}60\times10^{-19}\right)^2(1{,}67)^2(0{,}465)^2}{2\times1{,}06\times10^{-25}} = 8{,}8\times10^{-12}\ \mathrm{J} = 5{,}5\times10^{7}\ \mathrm{eV} = 55\ \mathrm{MeV}$$