DL n°5-2 : à remettre lundi 17 décembre 2007

Effet Doppler

Une source S émet un signal (lumineux, sonore ou autre), sous forme d'impulsions de durée "brève" (considérée comme nulle dans la suite du problème), à intervalles de temps réguliers égaux à T_S. On notera f_S la fréquence correspondante.

Un récepteur R mesure la fréquence (notée f_R) du signal reçu, fréquence différente de f_S lorsque S et R sont en mouvement l'un par rapport à l'autre.

On suppose que S et R se déplacent le long de l'axe Ox (vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$) avec des vitesses constantes $\overrightarrow{v_S} = v_S\,\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{v_R} = v_R\,\overrightarrow{u_x}$, v_S et v_R étant chacun positif ou négatif.

Le signal se déplace à la célérité c, constante, qu'il se propage selon les x positifs ou négatifs.

On travaille dans le référentiel où le milieu de propagation n'a pas de vitesse d'ensemble.

1. À un instant pris comme origine des temps, la source S se trouve en A_0 et le récepteur R en B_0, distant de ℓ de A_0 : $A_0B_0 = \ell$. S émet alors une impulsion (impulsion " zéro ").

1.a) À quel instant t_0, cette impulsion atteint-elle R ?

1.b) À l'instant $t = T_S$, la source émet une nouvelle impulsion (impulsion " un "). En quelle position A_1 se trouve à cet instant S (on donnera A_0A_1) et en quelle position B_1 se trouve le récepteur R (on donnera A_1B_1) ?

1.c) On choisit comme nouvelle origine des temps l'instant d'émission de l'impulsion un ". On pose ainsi $t = T_S + t'$. À quel instant t'_1, l'impulsion " un " atteint-elle R ? En déduire la durée T_R entre la réception de l'impulsion " zéro " et de l'impulsion " un ".

1.d) Donner la relation entre f_R et f_S. A quelle condition ces deux fréquences sont-elles égales ?

1.e) On suppose que le récepteur est immobile. Préciser si f_R est plus grande ou plus petite que f_S lorsque la source s'éloigne du récepteur (cas α), lorsque la source s'approche du récepteur (cas β).

2. On considère à nouveau une source S et un récepteur R mobiles, on ne s'intéresse qu'à l'impulsion " zéro ", émise à l'instant $t = 0$. On suppose qu'à l'instant t_0, l'impulsion reçue par R est réfléchie vers S.

2.a) À quel instant τ, S reçoit-il cette impulsion réfléchie ?

2.b) Dans le cas $c >> v_R$ et $c >> v_S$, exprimer τ par le premier terme non nul de son développement. Une horloge permet d'obtenir τ : que peut mesurer un tel dispositif ? Quels sont les appareils utilisant ce principe ?

On admettra que les résultats établis à partir d'un signal formé d'impulsions s'appliquent à un signal sinusoïdal de fréquence f.

3. On suppose qu'un signal sinusoïdal de fréquence f est émis par une source S immobile $(v_S = 0)$ et reçue par un récepteur R mobile $(v_R = v)$.

3.a) Donner, en fonction de f, c et v, la fréquence f_R du signal reçu par R.

3.b) Le récepteur R réfléchit le signal reçu et se comporte ainsi comme une source émettant à la fréquence f_R. Le dispositif S bascule en mode récepteur et perçoit alors un signal à la fréquence f'.

3.b.α) Exprimer f' en fonction de f_R, c et v.

3.b.β) En déduire l'expression de f' en fonction de f, c et v puis une expression approchée de f' si $|v| << c$.

3.b.γ) Exprimer avec cette approximation, $\delta f = f' - f$. On précisera le signe de δf si R s'éloigne de S.

4. Application 1 : la gendarmerie utilise un radar à effet Doppler pour contrôler la vitesse des véhicules. Un tel radar fonctionne sur le principe précédent du 3) (émission d'un signal de fréquence f, réception et mesure de la fréquence f' du signal réfléchi). Le signal est une onde électromagnétique hertzienne sinusoïdale de fréquence $f = 5\ \mathrm{GHz}$. On supposera que la célérité des ondes électromagnétiques dans l'air est celle des ondes électromagnétiques sinusoïdales planes dans le vide.

4.a.α) Préciser la valeur de cette célérité c.

4.a.β) Donner la vitesse (en km/h) d'un véhicule si une mesure donne $|\delta f| = 972\ \mathrm{Hz}$.

4.a.γ) On souhaite avoir une précision de 0,5 km/h. Quelle est la précision nécessaire sur δf (on supposera que les incertitudes sur les autres termes sont négligeables) ?

4.a.δ) Une mesure directe de f' vous semble-t-elle possible ? Justifier votre réponse.

Il n'est pas évoqué par la suite les procédés de conversion d'un signal électrique en onde électromagnétique, ou d'une onde électromagnétique en signal électrique. On raisonnera donc sur les signaux électriques.

Un oscillateur de référence fournit le signal d'émission $u_e = U_e \sin(2\pi\, f\, t)$. Le signal réfléchi mesuré est noté $u_r = U_r \sin(2\pi\, f' t + \varphi)$. Les signaux u_e et u_r sont alors appliqués à l'entrée d'un multiplieur qui délivre en sortie le signal u_s, avec $u_s = K.u_e.u_r$.

4.b.α) Quelle est l'unité de K. Préciser le spectre de u_s. (On choisira $\varphi = 0$ pour le calcul).

4.b.β) Quel filtre doit-on brancher en sortie du multiplieur pour récupérer un signal purement sinusoïdal de fréquence $\delta f = f' - f$? Proposer le schéma simple d'un tel filtre passif en précisant les conditions de son bon fonctionnement.

4.b.γ) Pour pouvoir utiliser le signal de sortie de ce filtre, on branche, en sortie du filtre, un amplificateur opérationnel idéal monté en suiveur. Faire le schéma et expliquer les raisons d'un tel montage.

5. Application 2 : première estimation de la valeur de c, vitesse de la lumière, par Römer. Dans toute cette partie, on considérera que le référentiel défini par le centre du Soleil et trois directions fixes est galiléen. Cela revient à considérer que $M_S \gg$ masse des planètes.

5.a) La Terre et Jupiter tournent autour du soleil sur des orbites pratiquement circulaires en 1 an (Terre) et en 12 ans (Jupiter). Le rayon de l'orbite terrestre est de 150 10^6 km. Donner le rayon de l'orbite de Jupiter.

On peut mesurer sur terre la période T de révolution de Io, satellite de Jupiter (orbite pratiquement circulaire). On constate que cette période T fluctue autour d'une valeur moyenne T_0 (amplitude 10 à 20 s avec $T_0 \approx 42\,\text{h}$).

Ces fluctuations s'expliquent par un effet Doppler. La formule établie en 1) avec v_R et v_S constant s'écrit alors dans un cas plus général (sous réserve que $|v_R| << c \ \ et \ \ |v_S| << c$) :

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right) \text{ avec } r \text{ distance variable observateur terrestre - Jupiter.}$$

5.b) Justifier cette formule et vérifier le signe de la différence $T - T_0$ en s'aidant des résultats du 1).

Lorsque le Soleil, la Terre et Jupiter sont alignés dans cet ordre (conjonction), r est minimum $(r = r_c)$. On note t_c l'instant d'une telle conjonction.

5.c) À quel instant t'_c se produit une nouvelle conjonction (on exprimera, en mois la durée $t'_c - t_c$) ? Approximativement, à quel instant t_0, (on exprimera $t_0 - t_c$), peut-on alors considérer que r est maximum (opposition $r = r_0$) ?

5.d) Quelle est la valeur de la vitesse de la Terre sur son orbite ? Quelle est la valeur maximale de dr/dt ? Donner numériquement l'écart maximal $T - T_0$ et tracer l'allure de $T - T_0 = f(t)$ entre t_c et t_0. Il n'est demandé aucune expression analytique de r ou de $T - T_0$.

Entre les instants t_c et t_0, Roemer notait aux instants t_i (environ toutes les 42 h) l'écart $T_i - T_0 = f(t_i)$. Il calculait alors $\tau = \sum_i (T_i - T_0)$.

5.e) Montrer alors que comme $T_0 \ll (t_0 - t_c)$, on peut assimiler τ au temps mis par la lumière pour parcourir le diamètre de l'orbite terrestre. Donner sa valeur.

Historiquement la mesure de τ a permis une première estimation de la valeur de c, vitesse de la lumière par l'astronome danois Ole Römer en 1676.