DL n°6-1 : corrigé

Optique géométrique (CCP 2007 MP)

I. DEFINITIONS

1. Systèmes optiques

a. Qu'appelle-t-on système optique centré ?

Un système centré est un système présentant un axe de symétrie que l'on appelle « axe optique ».

b. Qu'est-ce qu'un système catadioptrique ?

Un système optique catadioptrique est un système contenant au moins un miroir.

2. Stigmatisme

a. Stigmatisme rigoureux.

Un point A' est dit rigoureusement stigmatique d'un point A si le chemin optique AA' est rigoureusement le même pour tous les rayons traversant le système optique.

b. Système optique rigoureusement stigmatique pour tout point de l'espace.

Il n'existe qu'un seul système de ce type : le miroir plan.

3. Aplanétisme

a. Aplanétisme rigoureux.

Un point A' est dit rigoureusement aplanétique d'un point A si l'image B' d'un point B voisin de A tel que AB soit transverse est voisine de A' et telle que A'B' soit transverse.

b. Système optique rigoureusement aplanétique pour tout point de l'espace.

Il n'existe qu'un seul système de ce type : le miroir plan.

A. Approximation de Gauss

a. Conditions de Gauss.

Deux conditions doivent être réalisées :

1- Les rayons doivent être peu éloignés de l'axe optique.

2- Les rayons doivent être peu inclinés par rapport à l'axe optique.

b. Stigmatisme dans l'approximation de Gauss.

Dans l'approximation de Gauss, tout point A admet une image A' dans une condition de stigmatisme approché : les différents chemins optiques (AA') ne diffèrent que d'une quantité petite par rapport à la demi longueur d'onde.

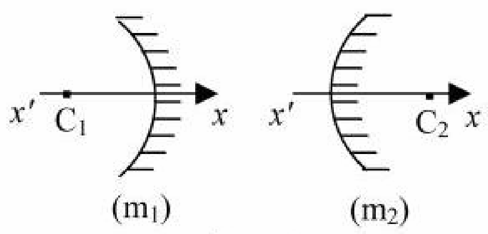
II. ETUDE DES MIROIRS SPHERIQUES

1. Caractère convergent ou divergent d'un miroir sphérique

a. Miroir convexe

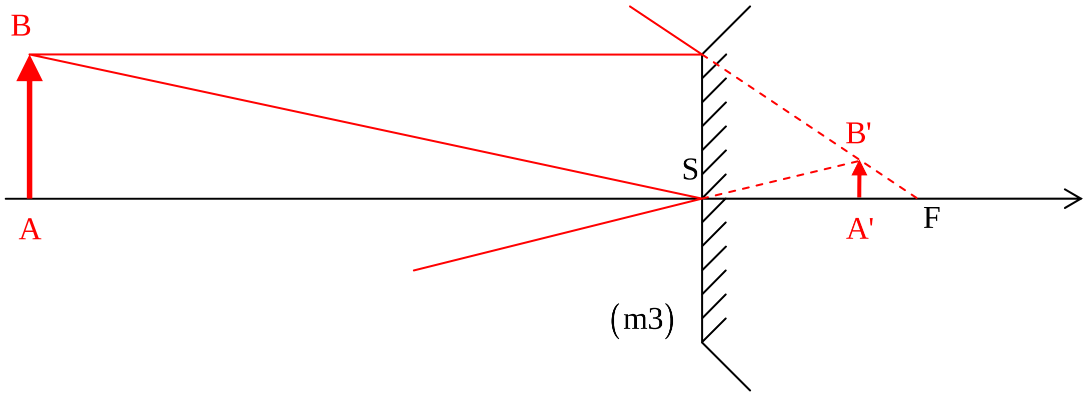
Un miroir convexe (i.e. plus épais au centre que sur les bords) est divergent.

b. Quel miroir (m1) ou (m2) est-il divergent ?



Le miroir (m2) est convexe, donc divergent.

c. Le miroir (m3) est-il convergent ou divergent ?



Ce miroir est divergent (l'image formée est virtuelle).

2. Relations de conjugaison et de grandissement.

a. Relation de conjugaison de Descartes.

a.1. Relations liant α, α' et β aux grandeurs algébriques $\overline{SA}$, $\overline{SA'}$, $\overline{SC}$ et $\overline{HI}$ dans l'approximation de Gauss.

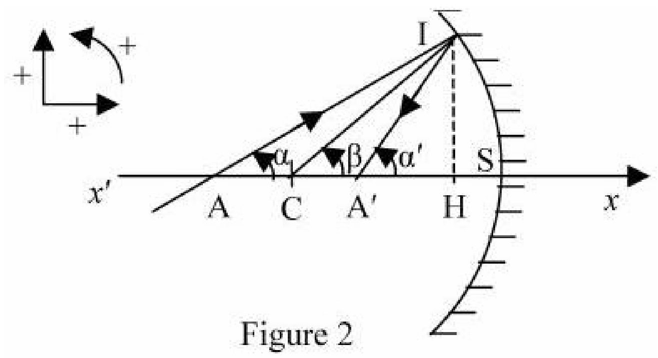


Figure 2

$$\alpha = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA}}\ ;\ \alpha' = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SA'}}\ ;\ \beta = -\frac{\overline{HI}}{\overline{SC}}.$$

a.2. Exprimer la relation entre α, α' et β.

D'après la loi de Descartes relative à la réflexion, nous avons $\beta - \alpha = \alpha' - \beta$, ou encore : $\alpha' + \alpha = 2\beta$.

a.3. En déduire la relation de conjugaison au sommet du miroir.

La relation $\alpha' + \alpha = 2\beta$ s'écrit aussi bien : $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$. On en déduit donc $k_1 = 2$

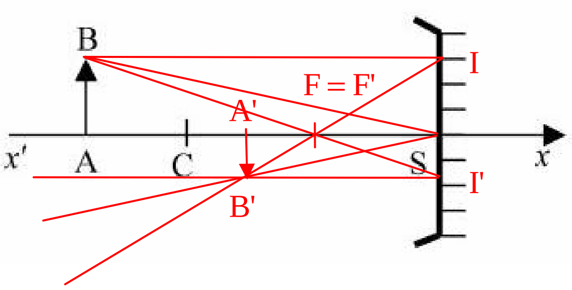
a.4. Expressions des distances focales.

Le foyer image F' est l'image d'un objet à l'infini sur l'axe : $\frac{1}{\overline{SF'}} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{f'}$. On en déduit : $f' = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$.

Le foyer objet F a son image rejetée à l'infini sur l'axe : $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\overline{SF}} = \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{f}$. On en déduit : $f = \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$

b. Relation de conjugaison de Newton.

b.1. Construction géométrique.



b.2. Relation de conjugaison de Newton.

Nous obtenons cette relation en exprimant le grandissement de deux façons différentes ;

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} \text{ et } \gamma = \frac{\overline{SI'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} \quad \text{et donc} \quad \overline{FA}\cdot\overline{FA'} = \overline{FS}^2 = \overline{FA}\cdot\overline{F'A'} = f\cdot f'$$

c. Relation de conjugaison : origine au centre.

c.1. Relations.

$$\overline{FA} = \overline{CA} - \overline{CF} = \overline{CA} - \frac{1}{2}\overline{CS} \text{ et } \overline{FA'} = \overline{CA'} - \overline{CF} = \overline{CA'} - \frac{1}{2}\overline{CS}$$

c.2. Déduire la formule de conjugaison avec origine au centre.

$$\overline{FA}\cdot\overline{FA'} = \left(\overline{CA} - \frac{1}{2}\overline{CS}\right)\left(\overline{CA'} - \frac{1}{2}\overline{CS}\right) = \frac{1}{4}\overline{CS}^2 \text{ soit : } \frac{1}{2}\overline{CS}\cdot\overline{CA'} + \frac{1}{2}\overline{CS}\cdot\overline{CA} = \overline{CA}\cdot\overline{CA'}$$

Nous obtenons la relation de conjugaison en multipliant chaque membre par $\frac{2}{\overline{CS}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{CA'}}$, ce qui donne : $\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$

Nous retrouvons la formule attendue, avec $k_2 = 2$

d. Grandissement.

d.1. En fonction de $\overline{SA}$ et $\overline{SA'}$.

Observons les triangles SAB et SA'B' : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

d.2. En fonction de $\overline{FA}$, $\overline{FA'}$ et $\overline{FS}$.

Nous avons déjà démontré à la question b.2. : $\gamma = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}}$

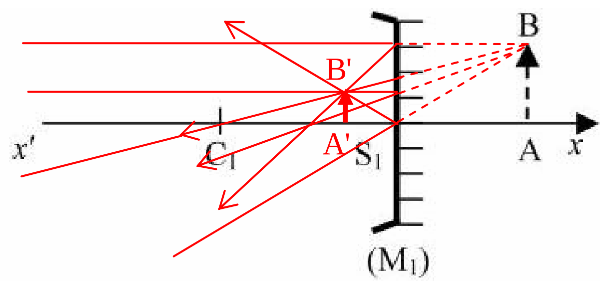
d.3. En fonction de $\overline{CA}$ et $\overline{CA'}$.

Observons les triangles CAB et CA'B' : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = +\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$

3. Correspondance objet-image pour des miroirs concaves et convexes.

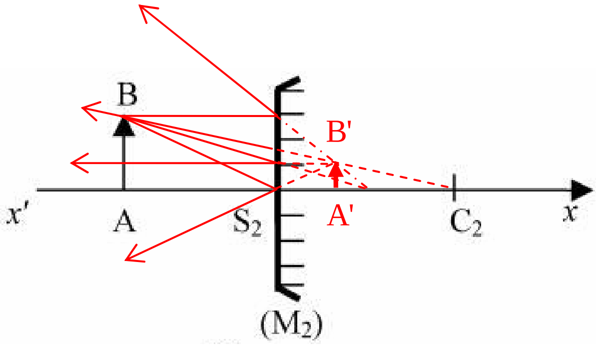
a. Construction géométrique de l'image A'B' d'un objet AB transverse.

a.1. Miroir (M_1)



deux quelconques des quatre rayons représentés ici font l'affaire

a.2. Miroir (M_2)

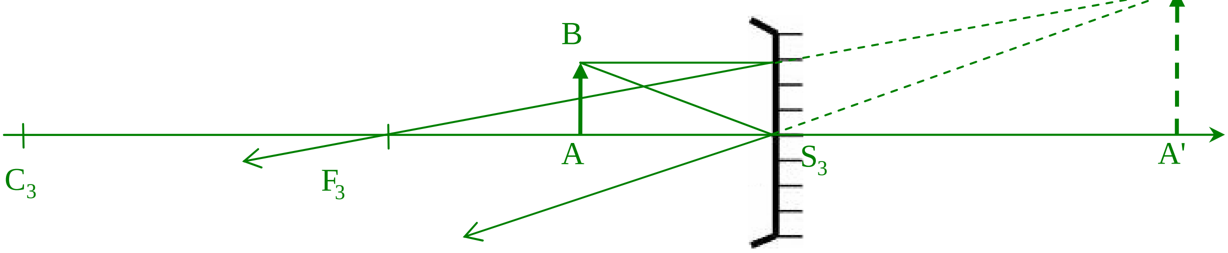


deux quelconques des quatre rayons représentés ici font l'affaire

b. Position de l'image A'B' et grandissement transversal.

b.1. Le miroir (M_3) est concave, de rayon de courbure R_3 tel que $|R_3| = 20$ cm. L'objet AB est situé au milieu de F_3S_3 (F_3 : Foyer objet ; S_3 : Sommet). Calculer $\overline{S_3A'}$ et en déduire le grandissement transversal de l'objet.

Note : cette construction géométrique n'était pas demandée



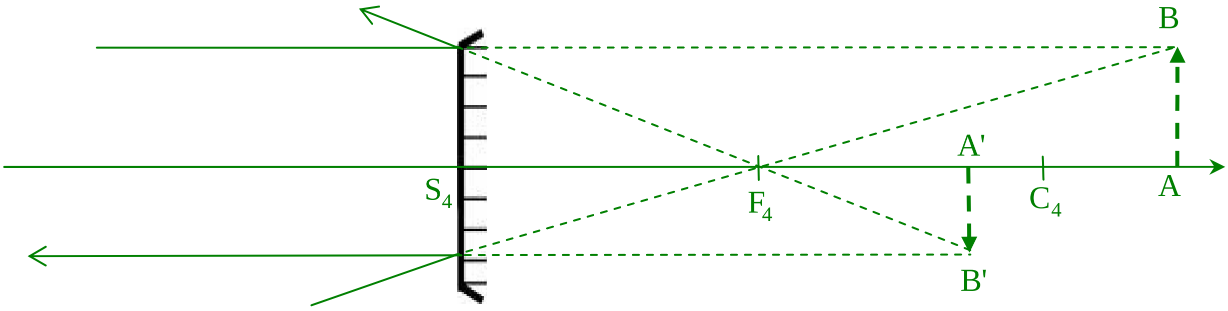
Utilisons la formule de conjugaison avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{S_3A'}} = \frac{2}{\overline{S_3C_3}} - \frac{1}{\overline{S_3A}} = -\frac{2}{|R_3|} - \frac{2}{\overline{S_3F_3}} = -\frac{2}{|R_3|} + \frac{4}{|R_3|} = +\frac{2}{|R_3|} \quad \text{donc} \quad \overline{S_3A'} = \frac{1}{2}|R_3| = 10 \text{ cm}$$

Le grandissement transversal est donc égal à $+2$.

b.2. Le miroir (M_4) est convexe, de rayon de courbure R_4 tel que $|R_4| = 40$ cm. L'objet AB est situé après S_4 tel que $\overline{S_4A}$ = 50 cm. Calculer $\overline{C_4A'}$ et en déduire le grandissement transversal de l'objet.

Note : cette construction géométrique n'était pas demandée



Utilisons la formule de conjugaison avec origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{C_4A'}} = \frac{2}{\overline{C_4S_4}} - \frac{1}{\overline{C_4A}} = \frac{2}{\overline{C_4S_4}} - \frac{1}{\overline{C_4S_4} + \overline{S_4A}} = -\frac{2}{|R_4|} - \frac{1}{-|R_4| + \overline{S_4A}} = \frac{-2\overline{S_4A} + |R_4|}{|R_4|\left(\overline{S_4A} - |R_4|\right)}$$

et donc : $\overline{C_4A'} = \dfrac{|R_4|\left(\overline{S_4A} - |R_4|\right)}{-2\overline{S_4A} + |R_4|} = \dfrac{40(50-40)}{-2\times 50 + 40} = -\dfrac{20}{3} = -6{,}67$ cm

Grandissement : $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\dfrac{\overline{C_4A'}}{\overline{C_4A}} = -\dfrac{\overline{C_4A'}}{\overline{S_4A} - |R_4|} = -\dfrac{20}{3(50-40)} = -\dfrac{2}{3}$

4. Système réflecteur : le télescope de Cassegrain

a. Observation de la Lune

a.1. Image de la Lune

Après réflexion sur $(\mathcal{M})$, l'image de la Lune est à une distance $\overline{FA'} = \frac{f^2}{\overline{FA}} = \frac{R^2}{4D_{TL}} \simeq 0$

Autant dire que cette image est dans le plan focal du miroir à la position $\overline{SF} = \frac{R}{2}$

a.2. Diamètre apparent de la Lune

Le disque lunaire est vu sous l'angle $\varepsilon = \frac{D_L}{D_{TL}} = \frac{3\,456}{384\,000} = 9\times10^{-3}\text{ rad} = 0,516° = 30,9'$

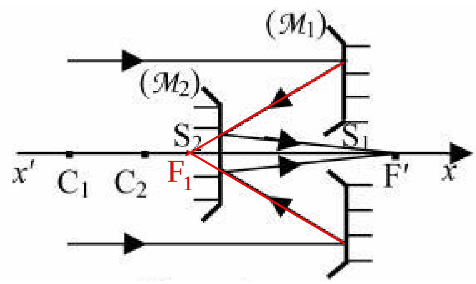
a.3. Dimension de l'image de la Lune

$$\overline{A'B'} = \left|\overline{AB}\,\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}\right| = \frac{D_L}{D_{TL}}\,\overline{SA'} = \varepsilon\,\frac{|R|}{2} = 9\times10^{-3}\,\frac{60}{2} = 0,27\text{ cm}$$

b. Télescope de type Cassegrain

b.1. Image intermédiaire de la Lune

L'image $A'B'$ de la Lune dans le miroir $(\mathcal{M}_1)$ doit être virtuelle et située en arrière du miroir $(\mathcal{M}_2)$ au point F_1 conjugué de l'image $A''B''$.



b.2. Position du foyer image F'

$$\frac{1}{\overline{S_2F'}} + \frac{1}{\overline{S_2F_1}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}} \text{ et donc } \frac{1}{\overline{S_2F'}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}} - \frac{1}{\overline{S_2S_1}+\overline{S_1F_1}} = \frac{2}{R_2} - \frac{1}{d+\frac{R_1}{2}} = \frac{2(2d+R_1-R_2)}{R_2(2d+R_1)}$$

Finalement : $\overline{S_2F'} = \frac{R_2(2d+R_1)}{2(2d+R_1-R_2)}$

Remarque : dans cette formule, les deux rayons sont négatifs.

b.3. Grandissement transversal de $A'B'$ à travers $(\mathcal{M}_2)$

$$\gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = -\frac{\overline{S_2A''}}{\overline{S_2A'}} = -\frac{\overline{S_2F'}}{\overline{S_2F_1}} = -2\frac{\overline{S_2F'}}{\overline{S_2S_1}+\overline{S_1C_1}} = -\frac{R_2(2d+R_1)}{(d+R_1)(2d+R_1-R_2)}$$

b.4. Applications numériques

$$\overline{S_2F'} = \frac{-40(2\times18-60)}{2(2\times18-60+40)} = 30\text{ cm} \;;\; \gamma = 2,5 \text{ et } \overline{A''B''} = \gamma\overline{A'B'} = 2,5\times0,27 = 0,675\text{ cm}$$

b.5. Focale d'une lentille simple équivalente

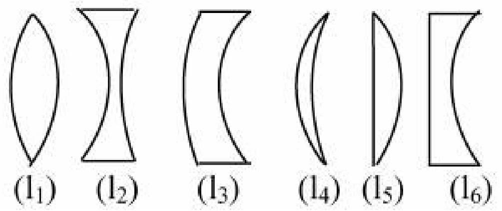
Une lentille convergente de distance focale image f_L donnerait de la Lune une image de diamètre $f_L\varepsilon$. Nous en déduisons : $f_L = \frac{A''B''}{\varepsilon} = \frac{0,675}{9\times10^{-3}} = 75\text{ cm}$.

Commentaire : Le montage optique de type Cassegrain est bien plus compact (30 cm au lieu de 75 cm).

III. ETUDE DES LENTILLES MINCES

1. Caractère convergent ou divergent d'une lentille mince.

a. Formes des lentilles sphériques minces

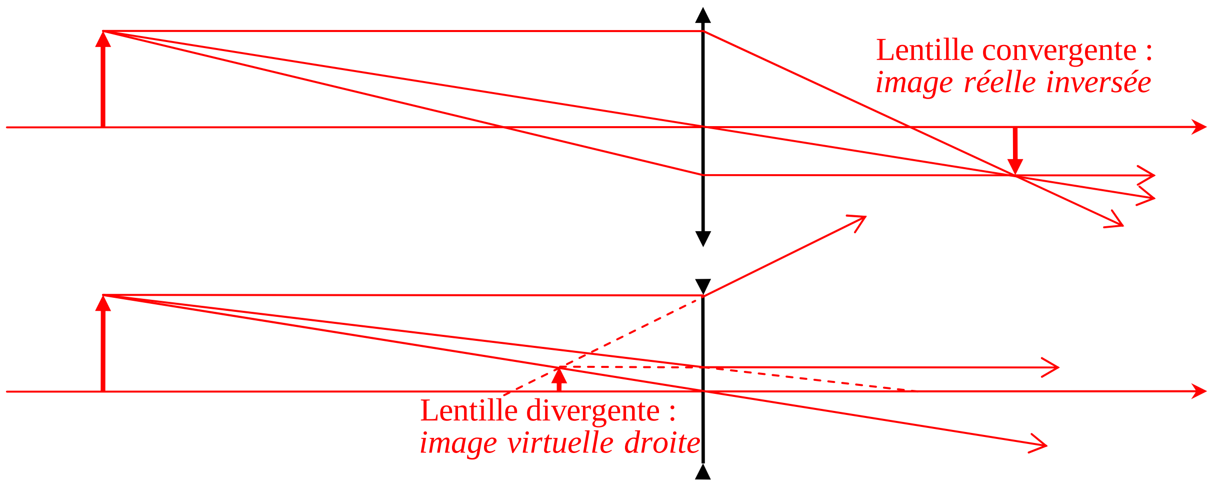


La lentille biconcave est la lentille (l_2), la lentille ménisque convergent est la lentille (l_4) et la lentille plan concave est la lentille (l_6).

b. Observation d'un objet éloigné.

On vise un objet placé à grande distance en plaçant l'œil loin d'une lentille (l_7). Nous voyons une image inversée de l'objet. La lentille (l_7) est-elle convergente ou divergente ? Justifier votre réponse.

Comme le montrent les constructions ci-dessous, si l'image d'un objet lointain est inversée, la lentille est convergente. S'il s'agissait d'une lentille divergente, l'image serait virtuelle et droite.



c. Déplacement transversal.

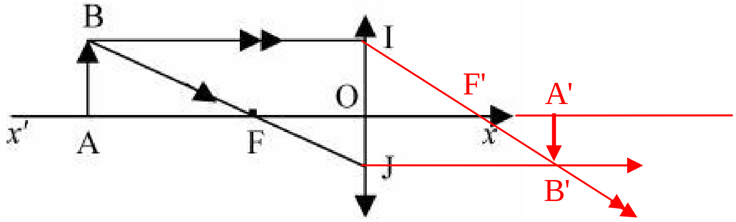
On place un objet réel de telle sorte que son image, vue à travers une lentille (l_8), soit droite. En déplaçant (l_8) transversalement à son axe optique, on constate que l'image de l'objet se déplace dans le même sens que la lentille. La lentille (l_8) est-elle convergente ou divergente ? Justifier votre réponse.

Si l'image se déplace dans le même sens que la lentille, cela veut dire qu'elle se trouve entre l'objet et la lentille : la lentille (l_8) est donc divergente.

2. Relations de conjugaison et de grandissement.

a. Relation de conjugaison de Newton.

Construction de l'image $A'B'$:



Le foyer image F' est le symétrique de F par rapport à O.

Grandissement transversal : $\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$

Nous en déduisons la relation de conjugaison de Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'}$

b. Relation de conjugaison de Descartes.

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \left(\overline{OA} - \overline{OF}\right) \cdot \left(\overline{OA'} - \overline{OF'}\right) = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} - \overline{OF} \cdot \overline{OA'} - \overline{OF'} \cdot \overline{OA} + \overline{OF} \cdot \overline{OF'} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'}$$

Nous en déduisons la relation $-\overline{OF'} \cdot \overline{OA'} + \overline{OF'} \cdot \overline{OA} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'}$ qui devient, en divisant par $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} \cdot \overline{OF'}$, la relation de conjugaison de Descartes :

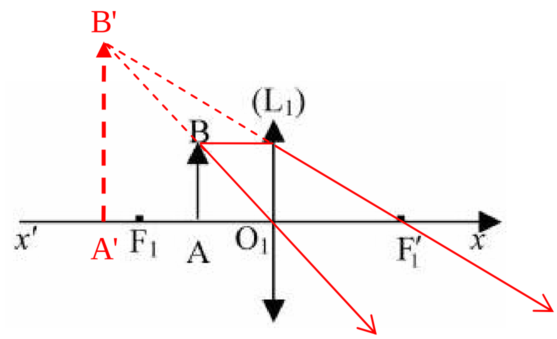
$$-\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

Expression du grandissement : $\Gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

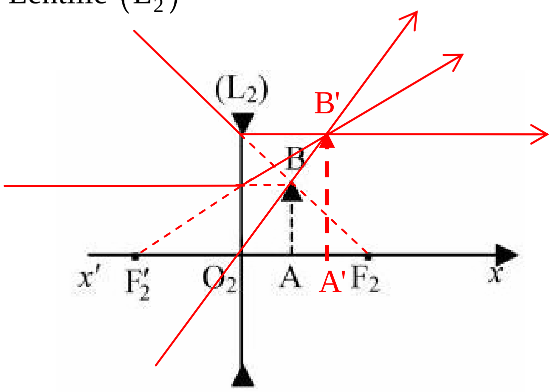
3. Correspondance objet-image pour des lentilles minces convergente et divergente.

a. Construction géométrique.

a.1. Lentille (L_1)



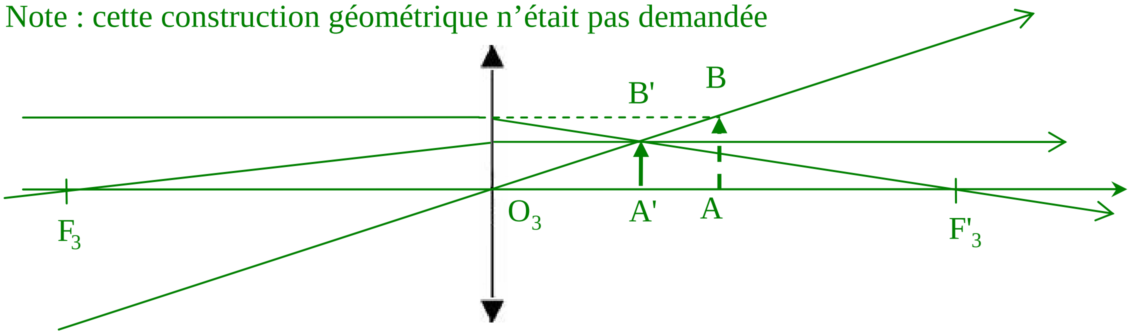
a.2. Lentille (L_2)



b. Position de l'image A'B' et grandissement transversal

b.1. La lentille (L_3) est convergente, de distance focale image +30 cm. Le positionnement de AB est tel que $\overline{O_3A} = 15$ cm. La position de A' sera donnée par la valeur de $\overline{F_3'A'}$.

Note : cette construction géométrique n'était pas demandée



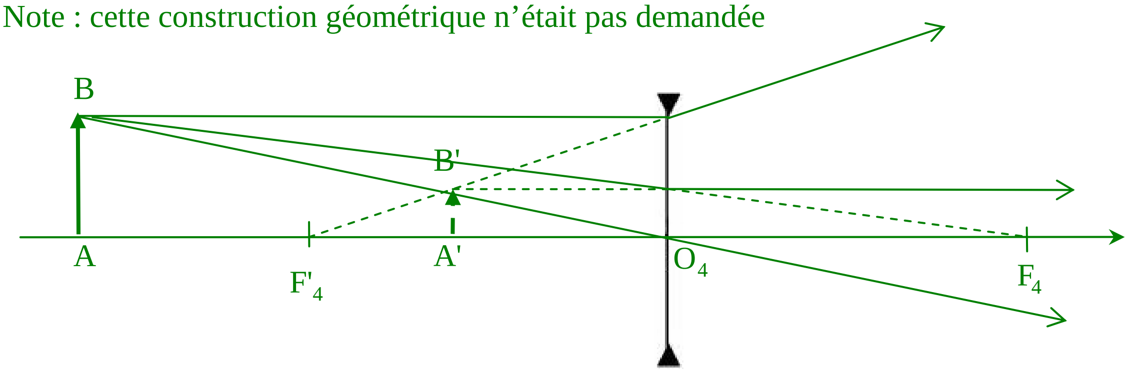
D'après la relation de conjugaison de Newton : $\overline{F'_3A'} = -\frac{f_3'^2}{\overline{F_3A}} = -\frac{f_3'^2}{\overline{O_3A} - \overline{O_3F_3}} = -\frac{f_3'^2}{\overline{O_3A} + f_3'}$

Application numérique : $\overline{F'_3A'} = -\frac{30^2}{15+30} = -20$ cm ; $\Gamma = -\frac{\overline{F'_3A'}}{f_3'} = +\frac{2}{3}$.

L'image est réelle et droite.

b.2. La lentille (L_4) est divergente, de distance focale image –30 cm. Le positionnement de AB est tel que $\overline{AF'_4} = 20$ cm. La position de A′ sera donnée par la valeur de $\overline{O_4A'}$.

Note : cette construction géométrique n'était pas demandée



D'après la formule de conjugaison de Descartes : $\dfrac{1}{\overline{O_4A'}} = \dfrac{1}{\overline{O_4F'_4}} + \dfrac{1}{\overline{O_4F'_4} + \overline{F'_4A}}$

Et donc $\overline{O_4A'} = \dfrac{\overline{O_4F'_4}\left(\overline{O_4F'_4} - \overline{AF'_4}\right)}{2\overline{O_4F'_4} - \overline{AF'_4}} = \dfrac{-30\times(-30-20)}{-2\times 30 - 20} = -\dfrac{75}{4} = -18{,}75 \text{ cm}$

Grandissement : $\Gamma = \dfrac{\overline{O_4A'}}{\overline{O_4A}} = \dfrac{\overline{O_4A'}}{\overline{O_4F'_4} - \overline{AF'_4}} = \dfrac{-18{,}75}{-30-20} = +0{,}37$

L'image est virtuelle et droite.

4. Système réfracteur : la lunette de Galilée

a. Nature distances focale des lentilles.

La lentille $(\mathcal{L}_1)$ est convergente, de distance focale image $f_1' = \dfrac{1}{V_1} = 0{,}2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$

La lentille $(\mathcal{L}_2)$ est divergente, de distance focale image $f_2' = \dfrac{1}{V_2} = -0{,}05 \text{ m} = -5 \text{ cm}$

b. La lunette est de type « afocal »

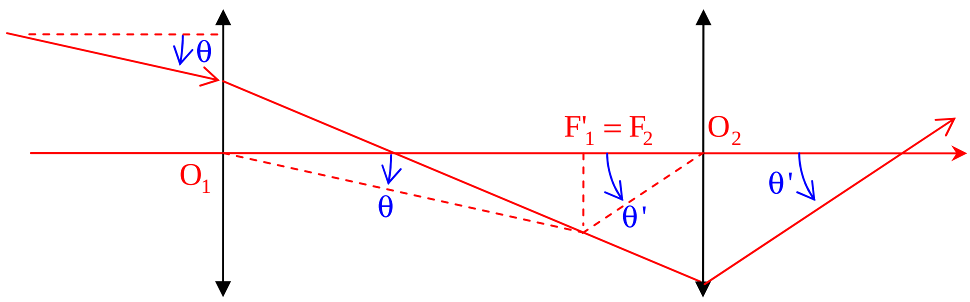
b.1. Préciser la position relative des deux lentilles, la valeur de la distance $d = \overline{O_1O_2}$ et l'intérêt d'une lunette afocale.

Le foyer image F'_1 de $(\mathcal{L}_1)$ doit coïncider avec le foyer objet F_2 de $(\mathcal{L}_2)$.

La distance *d* est alors : $d = f_1' + f_2' = 20 - 5 = 15$ cm

L'intérêt d'une lunette afocale réside dans le confort de l'observation : l'œil doit alors accommoder à l'infini.

b.2. Dessiner, dans les conditions de Gauss, la marche d'un rayon lumineux incident, issu d'un point objet à l'infini, faisant un angle θ avec l'axe optique et émergeant sous l'angle θ'.



b.3. En déduire le grossissement (ou grandissement angulaire) de cette lunette en fonction des angles θ et θ', puis des distances focales f_1' et f_2'. Valeur du grossissement ?

Grossissement : $G = \dfrac{\theta'}{\theta} = \dfrac{f_1'}{f_2'} = -4$

c. Un astronome amateur utilise cette lunette, normalement adaptée à la vision d'objets terrestres, pour observer deux cratères lunaires : Copernic (diamètre : 96 km) et Clavius (diamètre : 240 km). **Rappel :** Distance Terre – Lune : $D_{TL} = 384\,000$ km.

c.1. L'astronome voit-il ces deux cratères lunaires :
- à l'œil nu ? (Acuité visuelle : 3×10^{-4} rad)
- à l'aide de cette lunette ? Justifier vos réponses.

Copernic : $\theta = \dfrac{96}{384\,000} = 2{,}5\times10^{-4}$ rad $< 3\times10^{-4}$ rad, invisible à l'œil nu

$\theta' = G\theta = 10^{-3}$ rad $> 3\times10^{-4}$ rad, visible à l'aide de la lunette

Clavius : $\theta = \dfrac{240}{384\,000} = 6{,}2\times10^{-4}$ rad $> 3\times10^{-4}$ rad, visible à l'œil nu

$\theta' = G\theta = 2{,}5\times10^{-3}$ rad $> 3\times10^{-4}$ rad, *a fortiori* visible à l'aide de la lunette

c.2. La planète Vénus, de 12 150 km de diamètre, occultera Jupiter (de diamètre 145 800 km) le 22 novembre 2065.
Notre astronome amateur (qui sera certainement confirmé), pourra-t-il observer à l'œil nu ou à l'aide de sa lunette le disque jovien occulté par Vénus ? Dans cette configuration, la distance Terre-Vénus sera $D_{TV} = 45\times10^6$ km.

$\theta = \dfrac{12150}{45\times10^6} = 2{,}7\times10^{-4}$ rad $< 3\times10^{-4}$ rad : Jupiter sera vu à l'œil nu comme un point.

$\theta' = G\theta = 10{,}8\times10^{-4}$ rad $> 3\times10^{-4}$ rad : Jupiter sera vu dans la lunette comme un disque.