Électromagnétisme (CCP 2007 MP)

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

Le problème d'électromagnétisme comprend quatre parties indépendantes : des généralités sur les conducteurs, condensateurs et capacités et trois applications des condensateurs (système Terre-ionosphère et circuit RC) et conducteurs (câble coaxial).
Les six figures du problème d'électromagnétisme sont en page 5.
Des valeurs numériques des fonctions $\lg x$ et $\tan\alpha$ sont en page 5.
Les grandeurs scalaires sont représentées par : a, b, AB, CD
Les grandeurs vectorielles sont en caractères gras : **a**, ***b***, **AB**, ***CD***
En notation complexe ces grandeurs sont soulignées : $\underline{\text{a}}$, $\underline{b}$, $\underline{\text{AB}}$, $\underline{CD}$, $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$, $\underline{\mathbf{AB}}$, $\underline{\boldsymbol{CD}}$
Notation des produits scalaire $(\mathbf{AB}\cdot\mathbf{CD})$ et vectoriel $(\mathbf{AB}\times\mathbf{CD})$ de deux vecteurs.
ε_0 : désigne la permittivité du vide.
$\lg x$: désigne le logarithme décimal de x.

I. CONDUCTEURS – CONDENSATEURS – CAPACITES

1. Conducteurs – Propriétés.

a. Quelle distinction fait-on entre un conducteur métallique et un isolant ?
Parmi les types de matériaux suivants : plastique, métal, corps humain, verre, eau pure et eau du robinet, quels sont ceux que l'on classe parmi les conducteurs électriques ?

b. Qu'appelle-t-on conducteur en équilibre électrostatique ?
Définir à l'intérieur de ce conducteur les propriétés de : $\boldsymbol{E}_i$ (champ électrostatique), ρ_i (densité volumique de charges) et V_i (potentiel électrostatique).
Si l'on apporte des charges excédentaires à ce conducteur en équilibre électrostatique, où vont-elles se répartir ?

c. On considère un conducteur métallique creux, de surface (S_{ext}), en équilibre électrostatique dans lequel une cavité, de surface (S_c), ne contient pas de charges excédentaires (Figure 1).
Définir à l'intérieur de la cavité les propriétés de : $\boldsymbol{E}_c$ (champ électrostatique), ρ_c (densité volumique de charges), σ_c (densité surfacique de charges sur (S_c)) et V_c (potentiel électrostatique).
Où vont se placer les charges excédentaires que l'on dépose sur ce conducteur métallique creux en équilibre électrostatique ?

d. Théorème de Coulomb : énoncé et formulation.

2. Conducteurs – Capacités.

Soit V le potentiel d'un conducteur en équilibre, Q la charge portée par sa surface et σ la densité surfacique de charge.

a. Exprimer la capacité C du conducteur en fonction de V et de Q.

b. Calculer les capacités des conducteurs (en équilibre électrostatique) suivants :

b.1. *Conducteur plan* : on considère un disque conducteur de centre O_1, de rayon R_1, portant une charge surfacique σ_1, répartie uniformément sur une face.
Calculer, en fonction de σ_1, R_1 et ε_0, la charge Q_1 et le potentiel V_1 de ce conducteur et en déduire C_1.

b.2. *Conducteur cylindrique* : on considère un cylindre conducteur de rayon R_2, de longueur l, portant une charge surfacique σ_2, répartie uniformément sur la surface latérale.

Calculer, en fonction de σ_2, R_2, l et ε_0, la charge Q_2 et le potentiel V_2 de ce conducteur et en déduire C_2.

b.3. *Conducteur sphérique* : on considère une sphère conductrice de centre O_3, de rayon R_3, portant une charge surfacique σ_3, répartie uniformément sur la sphère.
Calculer, en fonction de σ_3, R_3 et ε_0, la charge Q_3 et le potentiel V_3 de ce conducteur et en déduire C_3.

3. Condensateurs – Propriétés.

a. Qu'appelle-t-on condensateur électrique ?

b. Parmi les condensateurs (plans, cylindriques et sphériques), citer trois types de condensateurs usuels.

c. Enoncer le théorème de Gauss, puis exprimer sa formulation mathématique précise.

4. Condensateurs – Capacités.

Soit un conducteur creux (B) entourant totalement un conducteur (A) (Figure 2).
Le conducteur interne (A), au potentiel V_A, porte sur sa surface extérieure la charge Q_A. Le conducteur externe (B), au potentiel $V_B < V_A$, porte sur sa surface intérieure la charge Q_{Bi} et sur sa surface extérieure la charge Q_{Be}.

a. A l'équilibre électrostatique de ces deux conducteurs, quelle est la relation entre les charges Q_A et Q_{Bi} ? Justifier votre réponse.

b. En considérant ce système de deux conducteurs comme un condensateur, définir la charge Q de ce condensateur. En déduire la capacité C en fonction de Q et des potentiels V_A et V_B.

c. Détermination des capacités des condensateurs suivants :

c.1. *Condensateur plan* : donner, sans démonstration, l'expression de la capacité C_1 d'un condensateur plan, supposé idéal, en fonction de e (écartement des deux armatures parallèles), S (aire des armatures) et ε_0.
Application numérique : le condensateur plan est doté de plaques circulaires de rayon 6 cm qui se trouvent à 2,5 mm l'une de l'autre. Calculer sa capacité et la charge qui apparaîtra sur les plaques si on leur applique une différence de potentiel de 150 V.

c.2. *Condensateur cylindrique* : soit un condensateur constitué de deux armatures cylindriques concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$ et de hauteur h. L'armature de rayon R_1 et de hauteur h porte la charge Q_1.

- Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, le champ électrostatique entre les armatures $\boldsymbol{E}$.
- Exprimer la différence de potentiel $\Delta V = V(R_1) - V(R_2)$ et en déduire la capacité C_2 du condensateur cylindrique en fonction de R_1, R_2, h et ε_0.
- Examiner le cas où $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.

c.3. *Condensateur sphérique* : un condensateur comprend deux armatures sphériques concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. L'armature interne de rayon R_1 possède une charge Q_1.

- Déterminer, en utilisant l'équation de Laplace, le potentiel électrostatique $V(r)$ entre les armatures et en déduire le champ électrostatique $E(r)$ en fonction de R_1, R_2, $V(R_1)$, $V(R_2)$ et r.

  Le laplacien d'une fonction scalaire en coordonnées sphériques a pour expression :

$$\Delta f(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

- En déduire la capacité C_3 du condensateur sphérique en fonction de R_1, R_2 et ε_0.
- Examiner le cas où $R_2 = R_1 + e$ avec $e \ll R_1$.

II. CONDENSATEUR SPHERIQUE : Système Terre-ionosphère

On représente l'ensemble Terre-ionosphère comme un volumineux condensateur sphérique qui peut être modélisé par le schéma de la Figure 3. La Terre, de rayon R, se comporte comme un conducteur parfait de potentiel nul et porte une charge négative $-Q$ ($Q>0$) uniformément répartie sur sa surface, tandis que l'ionosphère représentée par une surface équipotentielle sphérique de rayon $R+z_0$, de potentiel V possède une charge totale $+Q$. On suppose que l'atmosphère a la permittivité du vide.

1. Exprimer le champ électrostatique $\boldsymbol{E}(z)$ à l'altitude z ($0<z<z_0$) en fonction de Q, R, z et ε_0. (Vecteurs unitaires en coordonnées sphériques : $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$).

2. En déduire le potentiel V, puis la capacité C du système en fonction de R, z_0 et ε_0.

3. Des mesures à l'altitude $z_0 = 60$ km ont permis d'évaluer le potentiel à environ 360 kV. Justifier que dans ces conditions le système se comporte comme un condensateur plan. Calculer la capacité C et l'énergie électrostatique W_{el} du système, ainsi que la valeur du champ E au niveau du sol, le rayon terrestre valant 6 000 km. (On prendra $(1/\pi)\approx 0{,}32$).

4. Donner la valeur de la densité surfacique de charge σ à la surface de la Terre et en déduire sa charge totale $-Q$.

5. Lors d'un orage, la tension passe à $V_1 = 10^8$ V pour le système formé par le sol et la base des nuages d'altitude $z_1 = 1$ km. Déterminer les nouvelles valeurs σ_1 et E_1. Sachant qu'en temps normal, l'atmosphère est partiellement ionisée et parcourue par de faibles courants électriques verticaux dont l'effet principal est de décharger le système Terre-atmosphère, quelle est l'incidence d'un orage sur ces transferts de charges ?

III. CONDENSATEUR PLAN : Circuit RC

1. Circuit RC : Filtre du 1^er^ ordre.

On considère le filtre RC représenté en Figure 4. Un générateur délivre une tension sinusoïdale de pulsation ω et de tension efficace U_e. On suppose l'impédance de charge suffisamment élevée pour pouvoir négliger le courant de sortie ($I = 0$).

a. Prévoir la nature du filtre en examinant les comportements limites suivant la pulsation.

b. Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$ de ce filtre et la mettre sous une forme canonique en introduisant la variable réduite $x=\dfrac{\omega}{\omega_c}$ où ω_c est une pulsation caractéristique que l'on déterminera.

c. Tracer les diagrammes de Bode relatifs au gain et à la phase, respectivement $G_{\text{dB}}(\lg x)$ et $\varphi(\lg x)$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{100}\,,100\right]$. On précisera les asymptotes.

2. Circuit RC : Filtre du 2^ème^ ordre.

On considère le filtre représenté sur la Figure 5. Un générateur fournit à l'entrée une tension sinusoïdale de pulsation ω de valeur efficace U_e'.

a. Déterminer la nature de ce filtre par l'analyse des comportements limites.

b. Calculer la fonction de transfert $\underline{H}'(\mathrm{j}\omega)$ et l'exprimer en fonction de $x=\dfrac{\omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = 1/RC$.

c. Tracer les diagrammes de Bode $G_{dB}(\lg x)$ et $\varphi(\lg x)$ en précisant les asymptotes sur l'intervalle $\left[\frac{1}{100}, 100\right]$.

d. Déterminer les pulsations de coupure à 3 dB, ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) et en déduire la bande passante du filtre en fonction de RC.

IV. CONDUCTEURS CYLINDRIQUES : Câble coaxial

Une ligne électrique, supposée de longueur infinie, est constituée par un câble coaxial comprenant deux surfaces cylindriques, conductrices, de résistance négligeable, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. L'espace entre les deux conducteurs est vide.

Le câble est traversé par un courant alternatif d'expression en notation complexe $\underline{I}(z,t) = \underline{I}_m(z)\exp(j\omega t)$ dans le sens de Oz pour le conducteur interne et dans le sens opposé pour le conducteur externe (Figure 6). On suppose que les champs électrique $\underline{\boldsymbol{E}}$ et magnétique $\underline{\boldsymbol{B}}$ en tout point M dans l'espace $R_1 < \rho < R_2$ sont de la forme :

$$\underline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_0(\rho, z)\exp(j\omega t) \quad \text{et} \quad \underline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}_0(\rho, z)\exp(j\omega t)$$

et que le champ électrique $\underline{\boldsymbol{E}}$ est radial : $\underline{\boldsymbol{E}} = E_0(\rho, z)\exp(j\omega t)\boldsymbol{e}_\rho$

Donnée : Au point M (ρ, θ, z) de coordonnées cylindriques, la fonction vectorielle $\boldsymbol{G}(\mathrm{M}) = G_\rho \boldsymbol{e}_\rho + G_\theta \boldsymbol{e}_\theta + G_z \boldsymbol{e}_z$ admet pour rotationnel :

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{G} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial G_z}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial G_\rho}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho G_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial G_\rho}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_z$$

1. Par application de l'équation de Maxwell-Faraday sous forme locale au point M entre les deux conducteurs, montrer que le champ $\underline{\boldsymbol{B}}$ est orthoradial. (On négligera toute composante continue de ce champ).

2. En appliquant l'équation de Maxwell-Ampère sous forme intégrale (théorème d'Ampère généralisé) à un cercle d'axe Oz, de rayon ρ (cercle passant par M), déterminer en fonction de ρ et du courant $\underline{I}_m(z)\exp(j\omega t)$, le champ magnétique $\underline{\boldsymbol{B}}$.

3. Etablir une relation entre $\frac{\partial B_\theta}{\partial z}$ et $\frac{\partial E_\rho}{\partial t}$ en appliquant de nouveau l'équation de Maxwell-Ampère mais sous forme locale au point M, à la distance ρ de l'axe Oz. En déduire l'expression du champ électrique $\underline{\boldsymbol{E}}$ en fonction de ρ et du courant $\underline{I}_m(z)\exp(j\omega t)$. (On n'introduira pas de champ électrique constant).

4. En déduire que la fonction $\underline{I}_m(z)$ satisfait à une équation différentielle dont une solution est $\underline{I}_m(z) = I_0\exp(-jkz)$ et donner l'expression de k. Montrer que cette solution correspond à une « onde de courant » qui se propage parallèlement à l'axe Oz, avec un sens et une vitesse de phase que l'on précisera.

5. Déterminer, à partir de l'expression de $\underline{I}_m(z)$, les champs $\underline{\boldsymbol{E}}$ et $\underline{\boldsymbol{B}}$ en notation réelle ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$), et préciser les caractéristiques de cette onde électromagnétique existant entre les conducteurs.

6. Définir, en notation réelle, le vecteur de Poynting $\boldsymbol{S}$ et sa valeur moyenne temporelle $\langle \boldsymbol{S} \rangle$. En déduire le flux de $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ à travers la couronne circulaire comprise entre les circonférences de rayons R_1 et R_2.

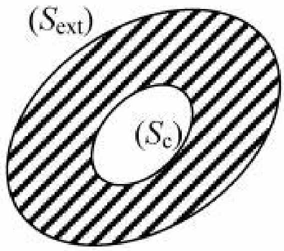


Figure 1

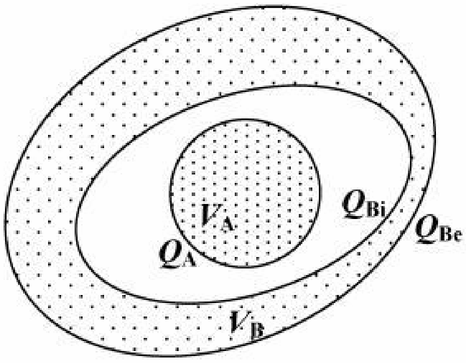


Figure 2

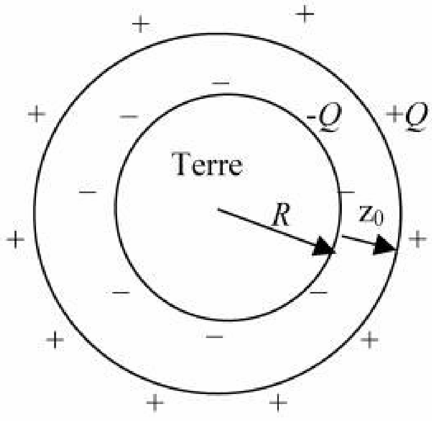


Figure 3

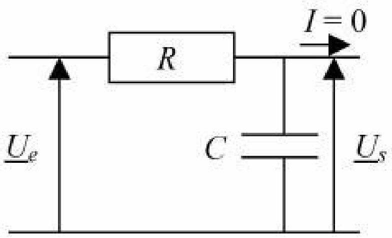


Figure 4

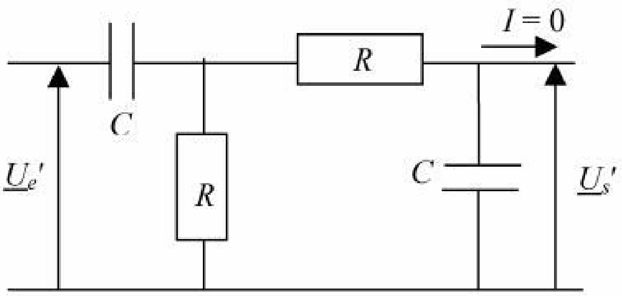
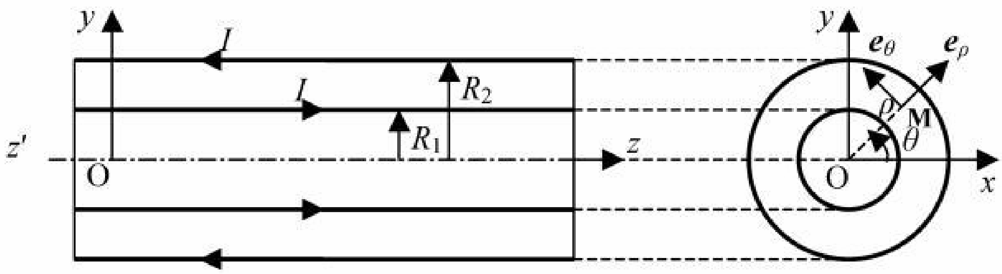


Figure 5

Figure 6



Valeurs numériques de lg x et de tan α

lg x : logarithme décimal de x

x	1,5	2	2,5	3	11	101	1001	10 001
lg x	≈ 0,176	≈ 0,301	≈ 0,398	≈ 0,477	≈ 1,041	≈ 2,004	≈ 3,000 4	≈ 4,000 04

tan α : tangente de l'angle α

α (rad)	$\frac{\pi}{2,01}$	$\frac{\pi}{2,02}$	$\frac{\pi}{2,03}$	$\frac{\pi}{2,04}$	$\frac{\pi}{2,05}$	$\frac{\pi}{2,1}$	$\frac{\pi}{2,2}$	$\frac{\pi}{2,3}$
tan α	≈ 128	≈ 64,3	≈ 43,1	≈ 32,5	≈ 26,1	≈ 13,3	≈ 7,0	≈ 4,8

α (rad)	$\frac{\pi}{2,4}$	$\frac{\pi}{2,5}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{30}$	$\frac{\pi}{100}$	$\frac{\pi}{300}$	$\frac{\pi}{1000}$
tan α	≈ 3,7	≈ 3,1	≈ 0,3	≈ 0,1	≈ 0,03	≈ 0,01	≈ 0,003