

Mécanique du point : oscillation d'un pendule simple

Un objet ponctuel A de masse m est suspendu à l'extrémité P d'un fil OP de masse négligeable et de longueur L . Il peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy) , autour de l'axe horizontal (Oz) .

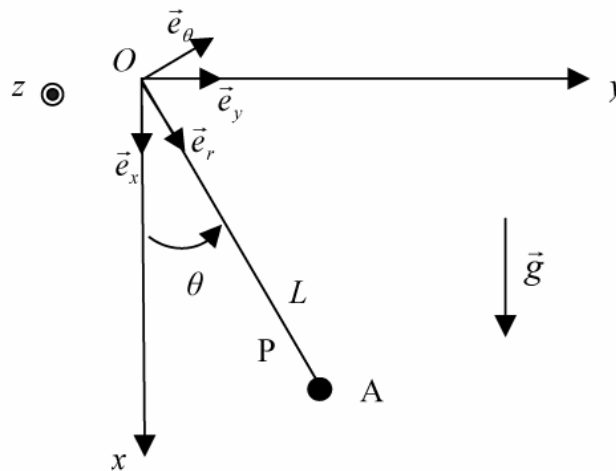
La position de l'objet A est repérée par l'angle θ que fait le fil avec la verticale.

L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements au niveau de l'axe de rotation seront négligés dans toutes les questions.

Les frottements de l'air seront négligés dans toutes les questions hormis dans les question 2.5 et 3.5 où l'on envisagera un amortissement par frottement fluide.

L'ensemble ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur \vec{g} tel que $\vec{g} = g \cdot \vec{e}_x$.



1 – Etude dynamique : équation différentielle du mouvement

1.1/ Faire le bilan des forces appliquées à l'objet A .

En appliquant le théorème du moment cinétique en coordonnées cylindriques par rapport au point O , déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ .

1.2/ Déterminer à l'aide de l'équation précédente la ou les positions d'équilibre du système. Etudier, en justifiant les résultats, la stabilité de ces positions.

2 – Petites oscillations

2.1/ A l'instant $t = 0$, l'objet A est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0 . On se place dans le cas où l'angle θ_0 est petit. Montrer que le système constitue alors un oscillateur harmonique.

En déduire la pulsation ω_0 et la période T_0 des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre stable. On exprimera ω_0 et T_0 en fonction de g et L .

2.2/ Compte tenu des conditions initiales, déterminer l'expression $\theta(t)$ de l'angle θ en fonction du temps pour $t \geq 0$.

2.3/ Quelle est la valeur maximale v_{\max} de la vitesse de l'objet A au cours de son mouvement ? On exprimera v_{\max} en fonction de θ_0 , L et g .

2.4/ Tracer la représentation graphique de θ en fonction du temps.

2.5/ Amortissement par frottement fluide

Nous nous plaçons dans le cas où l'objet A est soumis à un frottement fluide proportionnel à sa vitesse. Soit h le coefficient de proportionnalité entre la force de frottement \vec{f} et la vitesse \vec{v} de l'objet A . La force de frottement s'écrit donc sous la forme $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$.

Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ .

Les frottements sont supposés suffisamment faibles pour que le régime d'oscillations de l'objet A soit pseudo-périodique.

Déterminer alors, **dans le cas des petites oscillations**, la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ lorsque l'objet A est abandonné sans vitesse initiale d'une position repérée par l'angle θ_0 .

Donner, dans ce cas, l'allure de la représentation graphique de $\theta(t)$ en fonction du temps.

3 – Aspect énergétique

Nous nous proposons, dans cette question, de retrouver l'équation différentielle du mouvement du pendule par une méthode énergétique.

L'étude sera faite dans le cas général de mouvements d'amplitude quelconque.

3.1/ Déterminer, pour une position du pendule repérée par un angle θ quelconque, l'expression de l'énergie cinétique E_c de l'objet A (pour $t \geq 0$) en fonction de m , L et $\frac{d\theta}{dt}$.

3.2/ Déterminer de même, pour une position du pendule repérée par un angle θ quelconque, l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'objet A (pour $t \geq 0$) en fonction de m , L , θ et g accélération de la pesanteur. On prendra la référence de l'énergie potentielle de pesanteur dans la position repérée par l'angle $\theta = 90^\circ$.

3.3/ Sachant que dans cette question tous les frottements sont négligés, retrouver par des considérations énergétiques l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ au cours du temps.

3.4/ Dans le cas des mouvements de faible amplitude, l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie cinétique de l'objet A sont des fonctions périodiques du temps. Déterminer la période T'_0 de ces fonctions en fonction de T_0 (période définie dans la question 2.1). Justifier le résultat.

3.5/ Amortissement par frottement fluide

Nous nous plaçons à nouveau dans le cas où l'objet A est soumis à un frottement fluide proportionnel à sa vitesse. Soit h le coefficient de proportionnalité entre la force de frottement \vec{f} et la vitesse \vec{v} de l'objet A . La force de frottement s'écrit sous la forme $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$.

Compte tenu des expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur de l'objet A déterminées précédemment, retrouver par des considérations énergétiques l'équation différentielle du mouvement de la question 2.5 dans le cas où l'on prend en compte la présence d'un frottement fluide.