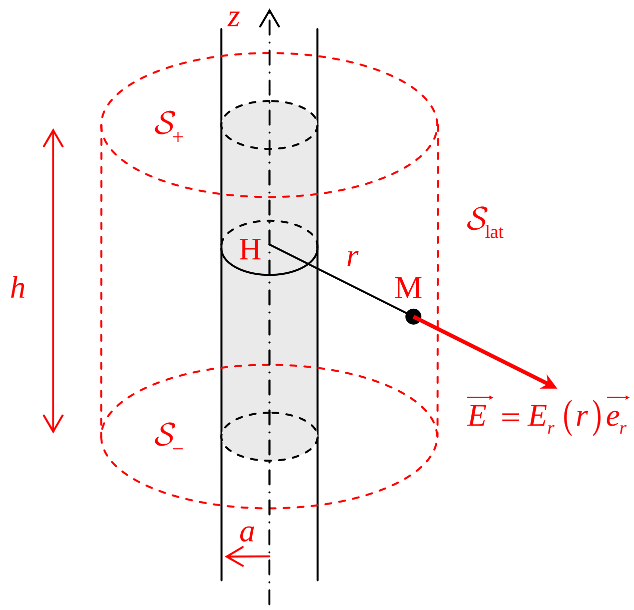
Électrostatique : Caténaire de traction électrique

Extrait du concours commun A 1970 des ENSI

A. Étude d'un conducteur seul

1. Champ électrique $\boldsymbol{E}$ à la distance $r > a$.



La distribution de charge est de symétrie cylindrique de révolution. Les grandeurs scalaires sont donc invariantes par translation selon l'axe du fil et par rotation autour du fil. Elles ne dépendent donc que du rayon r en coordonnées cylindriques.

Appelons H le projeté orthogonal de M sur l'axe : HM est un axe de symétrie (d'ordre 2) de la distribution de charge et l'on peut en conclure que le champ est radial, de la forme : $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$.

Pour déterminer $E_r(r)$, il suffit dès lors d'appliquer le théorème de Gauss à une surface cylindrique fermée de hauteur h, de rayon $r = \text{HM}$, ayant même axe que le fil chargé. Le champ étant radial, son flux est nul à travers les surfaces circulaires de fermeture $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$. Il reste le flux à travers la surface cylindrique latérale $\mathcal{S}_{\text{lat}}$ qui s'exprime dans le cas présent comme le produit de cette surface par la valeur algébrique du champ $E_r(r)$:

$$\phi = \oiint_{\substack{\text{surface}\\\text{de Gauss}}} \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\mathcal{S}_+} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{k}}_{0}\,dS + \iint_{\mathcal{S}_-} \underbrace{\vec{E}\cdot\left(-\vec{k}\right)}_{0}dS + \iint_{\mathcal{S}_{\text{lat}}} \underbrace{\vec{E}\cdot\vec{e}_r}_{E_r}\,dS = E_r \iint_{\mathcal{S}_{\text{lat}}} dS = E_r \times 2\pi r\,h$$

Le théorème de Gauss stipule que ce flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée est égal au rapport par ε_0 de la charge intérieure $q_0 h$.

Nous en déduisons l'expression du champ : $\vec{E} = \dfrac{q_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$

Remarque : q_0 désigne ici une charge linéique (charge par unité de longueur) et la formule exprimant le champ est bien homogène.

2. Potentiel électrique V à la distance $r > a$.

Nous obtenons le potentiel par circulation radiale du champ :

$$V(r) = -\int \vec{E}\cdot\vec{dr} = -\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r} = V_0 - \frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{a}$$

En notant V_0 le potentiel à la distance a qui est égal au potentiel du conducteur.

3. Donner les valeurs de $\boldsymbol{E}$ et de V à l'intérieur du conducteur, pour $r < a$.

À l'intérieur du conducteur à l'équilibre, le champ est nul, $\vec{E} = \vec{0}$, et le potentiel est uniforme $V = V_0$.

4. Champ $\boldsymbol{E}$ ($r = a^+$) à la surface du conducteur ?

À la surface du conducteur, le champ a pour valeur : $\vec{E} = \frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{e_r}$

Ceci correspond à la loi de Coulomb. En effet la charge surfacique du conducteur est uniforme et a pour valeur $\sigma = \frac{q_0}{2\pi a}$. La relation ci-dessus s'écrit donc aussi bien : $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_r}$

De plus, nous constatons une continuité de la composante tangentielle du champ (elle est nulle de part et d'autre) et une discontinuité de la composante normale de valeur $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, comme le stipule les relations de passage à travers une surface chargée.

B. Association de deux conducteurs

5. Expression du potentiel V_{M}.

Dans l'hypothèse où les deux conducteurs sont très éloignés l'un de l'autre, c'est-à-dire $d \gg a$, nous pouvons considérer que chaque conducteur se comporte comme un fil uniformément chargé et, par superposition, nous obtenons en prenant l'origine des potentiels à mi-chemin entre les deux conducteurs :

$$V_{\mathrm{M}} = -\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2r_1}{d} + \frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2r_2}{d} = \frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

6. Différence de potentiel entre les deux conducteurs (1) et (2), capacité C ?

Sur la surface du conducteur (1), $r_1 = a$ et $r_2 \simeq d$. Nous en déduisons : $V_1 = V_0 \simeq \frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$, $V_2 = -V_0 \simeq -\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$ et donc : $V_1 - V_2 = 2V_0 \simeq \frac{q_0}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$

La charge Q portée par le conducteur (1) a pour valeur $Q = q_0 h = C\left(V_1 - V_2\right)$ donc :

$$\frac{C}{h} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}$$

Application numérique : $\frac{C}{h} = 3{,}57\times10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}} = 3{,}57\ \mathrm{pF\cdot m^{-1}}$

7. Par quelles figures géométriques sont représentées les surfaces équipotentielles ?

Les surfaces équipotentielles sont cylindriques et leur section génératrice est telle que

$$\frac{r_1}{r_2} = \exp\left(-\frac{2\pi\varepsilon_0 V}{q_0}\right) = K$$

La symétrie du problème impose un potentiel nul dans la plan médiateur $x = 0$, ce qui correspond à une valeur de la constante $K = 1$.

ou encore, en introduisant les coordonnées cartésiennes x et y :

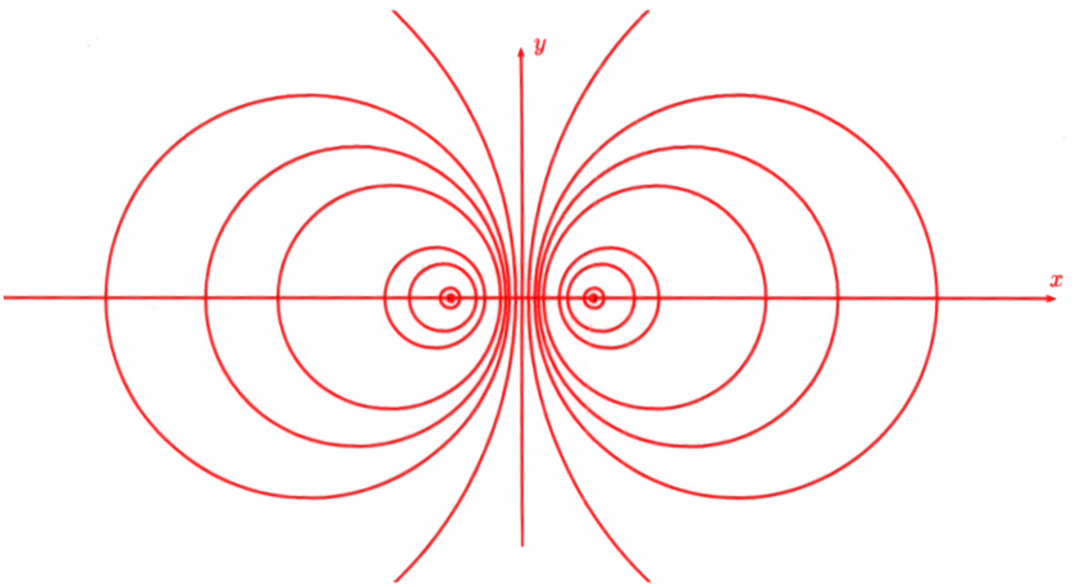
$$r_1^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 = K^2 r_2^2 = K^2\left(\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right)$$

soit : $$\left(x-\frac{d}{2}\frac{1+K^2}{1-K^2}\right)^2+y^2=\frac{K^2d^2}{\left(1-K^2\right)^2}$$

Il s'agit de l'équation cartésienne d'un cercle de rayon $R=\dfrac{Kd}{\left|1-K^2\right|}$ centré sur l'axe Oy à l'abscisse $x_C=\dfrac{d}{2}\dfrac{1+K^2}{1-K^2}$.

Remarquons que le plan équipotentiel $x=0$ correspond bien au cas particulier $K=1$.

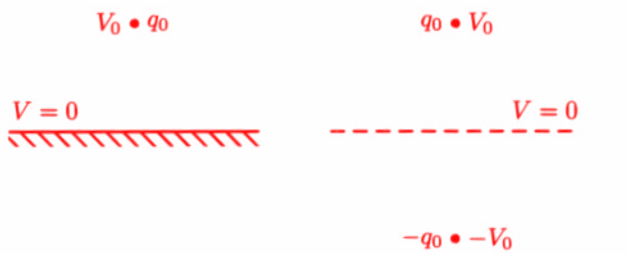
Application numérique : pour $V_M=\pm 500\ \mathrm{V}$, $x_C=\pm 280\ \mathrm{m}$ et $R=560\ \mathrm{m}$



C. Caténaire de traction électrique

8. Montrer l'analogie avec la partie B.

Le problème étudié dans la partie B correspond aux mêmes conditions aux limite au niveau du plan équipotentiel $x=0$. Étant donné l'unicité de la solution de l'équation de Poisson $\Delta V=0$ à laquelle doit satisfaire le potentiel, nous connaissons cette solution.



9. Quelles sont les valeurs numériques de la capacité C_u par mètre de longueur, de la charge linéaire q_0 et du champ électrique $\boldsymbol{E}$, à sa surface ?

V_0 représente la différence de potentiel entre les deux conducteurs. $Q=q_0h$ et $C_u=\dfrac{C}{h}=\dfrac{Q}{V_0h}=\dfrac{q_0}{V_0}$

soit : $C_u=\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{d}{a}}=7{,}15\times10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$ et $q_0=C_uV_0=1{,}07\times10^{-8}\ \mathrm{C\cdot m^{-1}}$

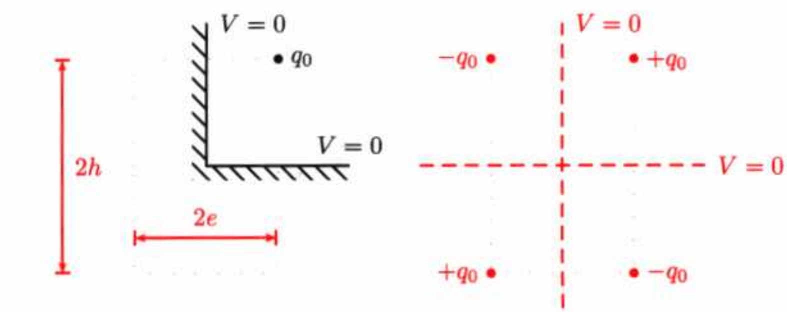
Le champ électrique est donné par le théorème de Coulomb :

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{q_0}{2\pi a\,\varepsilon_0}=3{,}85\times10^4\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$$

Le caténaire passe à proximité d'une paroi rocheuse plane verticale et très haute

10. Montrer que le système est équivalent à un système de quatre conducteurs.

Il suffit de prendre quatre conducteurs de charge linéiques alternées $\pm q_0$ placées symétriquement par rapport au sol et à la paroi rocheuse. Les conditions aux limites du problème sont alors satisfaites :



11. Donner l'expression de la capacité par unité de longueur du conducteur C_u en présence du sol et de la paroi rocheuse.

Le potentiel à la surface du fil caténaire est alors la somme de quatre termes. Pour les trois termes dus aux autres conducteurs, nous ferons l'approximation $a \ll 2h$ et $a \ll 2e$. *A fortiori*, la troisième condition $a \ll 2\sqrt{h^2+e^2}$ est satisfaite. Nous en déduisons :

$$V=\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\ln a+\ln(2h)+\ln(2e)-\ln\left(2\sqrt{h^2+e^2}\right)\right)=\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2he}{a\sqrt{h^2+e^2}}$$

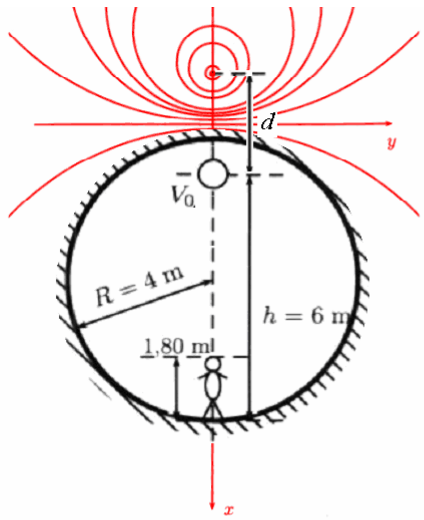
Et nous en déduisons, pour cette circonstance, la valeur de C_u :

$$C_u=\frac{q_0}{V_0}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2he}{a\sqrt{h^2+e^2}}}=7{,}73\times10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$$

12. Que devient l'amplitude du champ électrique $\boldsymbol{E}$ a surface du conducteur ?

Toujours par application du théorème de Coulomb : $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{C_uV_0}{2\pi a\,\varepsilon_0}=4{,}17\times10^4\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$

Le caténaire pénètre dans un tunnel cylindrique



13. Montrer que les propriétés électriques du système constitué par le conducteur au potentiel V_0, et le tunnel au potentiel zéro sont, à un décalage global des potentiels près, équivalentes à celles d'un système de deux conducteurs dont on définira les positions et les états électriques.

Un système de deux fils de charges opposées donne des équipotentielles cylindriques de section circulaire. Il s'agit simplement de placer correctement le deuxième fil pour que la différence de potentiel corresponde à notre problème.

Avec origine des potentiels dans le plan de symétrie $x=0$, le potentiel du caténaire est $V_{\text{fil}}=\dfrac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d}{a}$ tandis que le potentiel du tunnel est tel que $V_{\text{tunnel}}=\dfrac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d-2R+h}{2R-h}$ (exprimé au point supérieur) ou $V_{\text{tunnel}}=\dfrac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d+h}{h}$ (exprimé au point inférieur). La différence de potentiel doit être égale à V_0, nous en déduisons :

D'une part la condition nécessaire $\dfrac{d-2R+h}{2R-h}=\dfrac{d+h}{h}$, qui implique : $d=\dfrac{(2R-h)h}{h-R}=6\ \text{m}$

D'autre part : $V_0=V_{\text{fil}}-V_{\text{tunnel}}=\dfrac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d}{a}-\dfrac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d+h}{h}=\dfrac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{dh}{a(d+h)}=\dfrac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{h(2R-h)}{aR}$

14 Donner l'expression de la capacité du conducteur en présence du tunnel.

Nous avons toujours : $C_u=\dfrac{q_0}{V_0}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{h(2R-h)}{aR}}=8,70\times10^{-12}\ \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$

15. Que devient l'amplitude E du champ électrique à la surface du conducteur ?

Toujours par application du théorème de Coulomb : $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}=\dfrac{C_uV_0}{2\pi a\,\varepsilon_0}=4,69\times10^{4}\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$

16. Un individu mesurant 1,80 m est-il en danger lorsqu'il se déplace dans le tunnel ?

À la cote $h'=1,80\ \text{m}$, le potentiel a pour valeur : $V'=\dfrac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{d+h-h'}{h-h'}$ et l'on a :

$$V'-V_{\text{tunnel}}=V_0\frac{\ln\dfrac{Rh-h'h+h'R}{R(h-h')}}{\ln\dfrac{h(2R-h)}{aR}}=45,5\ \text{V}$$

Autant dire qu'il n'y a aucun danger…