

## Électrostatique : Caténaire de traction électrique

### Extrait du concours commun A 1970 des ENSI

On se propose d'étudier les propriétés électromagnétiques relatives à des conducteurs cylindriques disposés parallèlement les uns par rapport aux autres dans d'air. Ces conducteurs sont très longs, mais cependant de dimensions finies. On négligera les effets de leurs extrémités ; par suite, les répartitions des champs et des potentiels dans un plan perpendiculaire à leurs axes sont indépendantes de la position de ce plan le long de ces conducteurs.

La permittivité de l'air sera prise égale à celle du vide,  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

On rappelle que le champ électrique intérieur à un conducteur à l'équilibre est nul et que par conséquent les charges électriques qu'il porte sont réparties en surface.

### A. Étude d'un conducteur seul

On considère un conducteur cylindrique très long, en cuivre, de rayon  $a$ , seul dans l'espace ; il est porté au potentiel  $V_0$  on désigne par  $q_0$  la charge électrique linéaire qu'il porte par mètre de longueur.

1. Donner l'expression du champ électrique  $E$  à la distance  $r > a$  de l'axe de ce conducteur en fonction de la charge linéaire  $q_0$ .
2. Donner l'expression générale du potentiel électrique  $V$  à la distance  $r > a$  de l'axe.
3. Donner les valeurs de  $E$  et de  $V$  à l'intérieur du conducteur, pour  $r < a$ .
4. Quelle relation lie le champ  $E$  ( $r = a^+$ ) à la surface du conducteur, son rayon  $a$  et la charge électrique linéaire  $q_0$  qu'il porte ? Commenter.

### B. Association de deux conducteurs

On considère deux conducteurs identiques au précédent, parallèles entre eux, seuls dans l'espace. Leurs rayons  $a$  sont de 0,5 cm, leurs axes sont à la distance  $d = 12$  m. Le conducteur (1) est porté au potentiel  $+V_0 = 1500$  V et le conducteur (2) au potentiel  $-V_0$ . Ces conducteurs ne transportent pas d'énergie vers un récepteur.

5. Donner l'expression du potentiel  $V_M$  en un point M aux distances  $r_1$  de l'axe du conducteur (1) et  $r_2$  de l'axe du conducteur (2), en fonction de charges linéiques  $+q_0$  et  $-q_0$  portées par chaque conducteur. On fera les approximations dues au fait que la distance  $d$  est très grande devant le rayon  $a$ .
6. Donner l'expression liant la différence de potentiel entre les deux conducteurs (1) et (2) à la charge linéique, dans le cadre de mêmes approximations. Le système, de longueur totale  $h$  formant un condensateur, quelle est sa capacité  $C$  ? Faire l'application numérique par mètre de longueur.
7. Par quelles figures géométriques sont représentées les surfaces équipotentielles ? Le potentiel étant défini à une constante près, trouver cette constante en déterminant l'équipotentielle  $V_M = 0$  ; déterminer les équipotentielles  $V_M = 500$  V et  $V_M = -500$  V. Faire un tracé de quelques équipotentielles.

**C. Caténaire de traction électrique**

Un conducteur caténaire de traction électrique à courant continu est parallèle au plan du sol à une hauteur  $h = 6 \text{ m}$  ; son rayon est  $a = 0,5 \text{ cm}$  ; il est porté au potentiel  $V_0 = 1500 \text{ V}$ . Au point de vue électrique, le sol peut être assimilé à un conducteur plan au potentiel zéro pris comme origine des potentiels.

- 8. Montrer l’analogie existant entre les propriétés électriques de ce conducteur au dessus du plan du sol et celles du système de deux conducteurs aux potentiels  $+V_0$ , et  $-V_0$ , faisant l’objet de la partie B.
- 9. Quelles sont les valeurs numériques de la capacité  $C_u$  de ce conducteur, en présence du sol, par mètre de longueur, de la charge linéaire  $q_0$  qu’il porte par mètre de longueur, et du champ électrique  $E$ , à sa surface ?

Ce conducteur passe à une distance  $e = 4 \text{ m}$  d’une paroi rocheuse plane verticale et très haute (fig.1 à gauche).

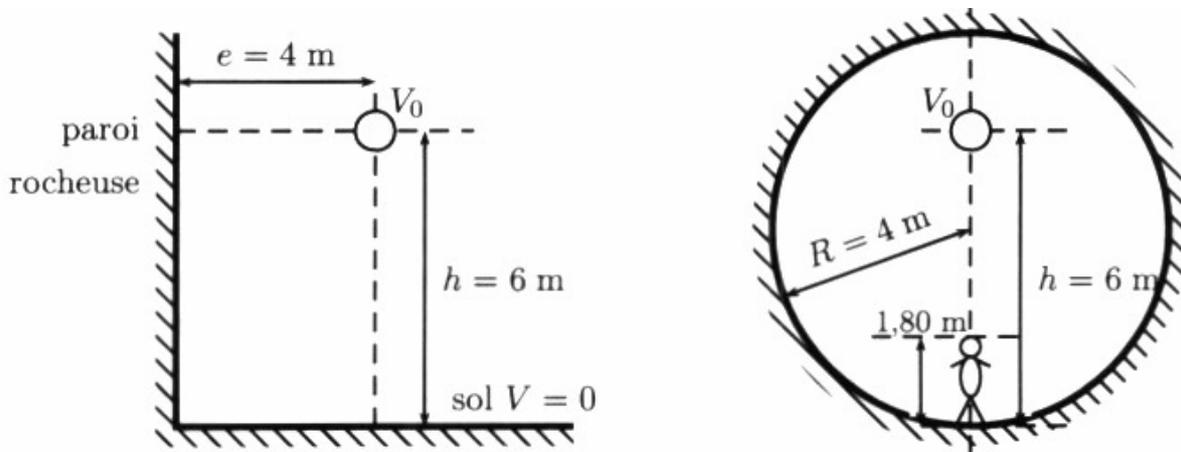


fig.1 — Caténaire en présence du sol et d’une paroi (à gauche) et dans un tunnel (à droite)

- 10. Montrer que les propriétés électriques du système constitué par le conducteur au potentiel  $V_0$ , le plan du sol et la paroi rocheuse verticale, sont équivalentes à celles d’un système de quatre conducteurs dont on définira les positions et les états électriques.
- 11. Donner l’expression de la capacité par unité de longueur du conducteur  $C_u$  en présence du sol et de la paroi rocheuse.
- 12. Que devient l’amplitude du champ électrique  $E$  a surface du conducteur ?

Ce caténaire pénètre dans un tunnel cylindrique de rayon  $R = 4 \text{ m}$  ; il reste à une hauteur de  $6 \text{ m}$  au dessus du sol, suivant la verticale passant par le centre du tunnel (fig.1 à droite).

- 13. Montrer que les propriétés électriques du système constitué par le conducteur au potentiel  $V_0$ , et le tunnel au potentiel zéro sont, à un décalage global des potentiels près, équivalentes à celles d’un système de deux conducteurs dont on définira les positions et les états électriques.
- 14. Donner l’expression de la capacité du conducteur en présence du tunnel.
- 15. Que devient l’amplitude  $E$  du champ électrique à la surface du conducteur ?
- 16. Quelle est la valeur du potentiel à la cote de  $1,80 \text{ m}$  au dessus du niveau du sol, à la verticale du conducteur ? Un individu mesurant  $1,80 \text{ m}$  est-il en danger lorsqu’il se déplace dans le tunnel ?