Deuxième problème : Électrostatique et Magnétostatique

D'après le concours CCP TSI 2002

Dans tout le problème, la permittivité électrique de l'air est égale à celle du vide, notée ε_0 et égale à $8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}. De même, la perméabilité magnétique de l'air est égale à celle du vide, notée μ_0 et égale à $4\pi.10^{-7}$ H.m^{-1}.

1ère partie : Condensateur cylindrique

1/ Enoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant d'un champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int}.

On considère un condensateur cylindrique à air formé de deux armatures coaxiales de hauteur h et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. L'armature interne porte la charge électrique Q. Les potentiels électriques des armatures sont respectivement V_1 et V_2. Soit un point M situé à la distance r de l'axe : $R_1 < r < R_2$ (figure 1).

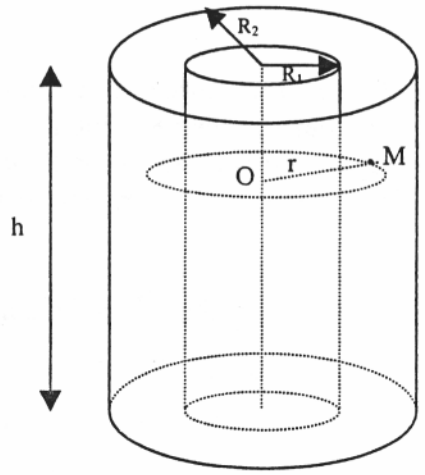

Figure 1

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de la droite (OM) dirigé de O vers M. Le champ électrique $\vec{E}$ créé au point M est radial et sa norme ne dépend que de r. On peut donc écrire : $\vec{E} = E(r)\ \vec{u}$.

2/ Calculer la composante E(r) du champ $\vec{E}$ entre les armatures en appliquant le théorème de Gauss à une surface S que l'on précisera.

3/ a/ Calculer la circulation du champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures en fonction de Q, ε_0, h, R_2 et R_1.

b/ Relier d'autre part (sans démonstration) cette circulation aux potentiels électriques des armatures V_1 et V_2.

4/ a/ Exprimer la capacité C du condensateur en fonction de Q et des potentiels électriques des armatures V_1 et V_2, puis en fonction de ε_0, h, R_2 et R_1.

b/ Calculer C pour R_1 = 10 cm, R_2 = 20 cm et h = 50 cm.

5/ Que devient l'expression de C si les rayons des armatures sont très voisins, c'est-à-dire si $R_2 - R_1 = e << R_1$?
Montrer que le condensateur cylindrique est alors équivalent à un condensateur plan dont on donnera les caractéristiques (épaisseur e' et surface S').

6/ a/ Pour quelle valeur de r la norme du champ électrique est-elle maximale ?
On souhaite que cette valeur maximale ne dépasse pas la valeur E_0 afin d'éviter un claquage du condensateur. Calculer alors la valeur maximale V_{max} de la différence de potentiel pouvant être appliquée entre les armatures en fonction de E_0, R_1 et R_2.

b/ Calculer V_{max} pour $E_0 = 3\ MV.m^{-1}$.

7/ a/ Calculer l'énergie électrostatique du système de charges par son expression intégrale $\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\iint_{S_1 \cup S_2} \sigma V\, dS$ où S_1 et S_2 sont les surfaces des deux armatures du condensateur.

b/ Calculer l'énergie du champ électrique par son expression intégrale $\mathcal{E}_e = \iiint_\tau u_e\, d\tau$ où u_e représente la densité volumique d'énergie électrique, τ étant le volume intérieur du condensateur.

c/ Commenter ces résultats.

2ème partie : Câble coaxial

1/ Enoncer le théorème d'Ampère relatif à la circulation d'un champ magnétostatique $\vec{B}$ le long d'un contour fermé $\mathcal{C}$ constitué de points M et s'appuyant sur une surface S. On notera $\vec{j}(P)$ la densité de courant en un point P de la surface S.

On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1 parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2, de rayon extérieur R_3 ($R_1 < R_2 < R_3$) et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant du conducteur central.

On notera $\vec{e}_z$ le vecteur directeur unitaire de l'axe commun des 2 conducteurs. Soit un point M situé à une distance r de l'axe du câble (figure 2).

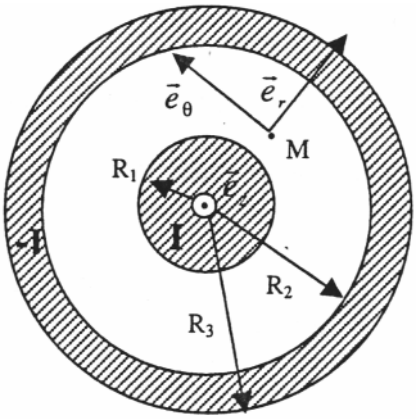

Figure 2

2/ a/ Montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ créé au point M est orthoradial.

b/ Montrer qu'il peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\ \vec{e}_\theta$ où B(r) est une fonction de r uniquement.

c/ Préciser alors la forme des lignes de champ.

3/ a/ Montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ créé au point M est nul si $r > R_3$.

b/ Expliquer alors l'intérêt du câble coaxial par rapport à un fil simple parcouru par un courant de même intensité.

4/ Calculer les densités de courant $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique en fonction des courants I_1 et I_2 et des rayons R_1, R_2 et R_3.

5/ En appliquant le théorème d'Ampère à un contour $\mathcal{C}$ que l'on précisera, donner l'expression de la composante B(r) du champ magnétique créé au point M en fonction de μ_0, I, r, R_1, R_2 et R_3, dans chacun des trois cas suivants :

a/ $r < R_1$

b/ $R_1 < r < R_2$

c/ $R_2 < r < R_3$

6/ Justifier puis vérifier la continuité du champ $\vec{B}$ pour $r = R_1$ puis pour $r = R_2$.

7/ Dessiner le graphe de la fonction B(r).

8/ Quelles sont les propriétés d'invariance et de symétrie du potentiel vecteur $\vec{A}$ défini dans le cadre de la Jauge de Coulomb ?

9/ Déterminer le potentiel vecteur $\vec{A}$ dans chacun des trois cas suivant :

a/ $r < R_1$

b/ $R_1 < r < R_2$

c/ $R_2 < r < R_3$

10/ a/ Calculer l'énergie magnétostatique du système de courants par son expression intégrale $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\iiint_{\tau_1 \cup \tau_2} \vec{j}\,\vec{A}\,d\tau$ où τ_1 et τ_2 sont les volumes d'une hauteur h des conducteurs intérieurs et extérieurs.

b/ Calculer l'énergie du champ d'induction magnétique par son expression intégrale $\mathcal{E}_m = \iiint_{\tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3} u_m\,d\tau$ où u_m représente la densité volumique d'énergie magnétique, τ_1 et τ_2 sont les volumes d'une hauteur h des conducteurs intérieurs et extérieurs et τ_3 est le volume de l'espace intermédiaire.

c/ Commenter ces résultats.