Premier problème : isolation thermique *(École de l'air 2002)*

I) Étude thermique d'un simple vitrage.

1) Étude de la conduction seule.

a) Établir l'équation de conduction thermique.

Le bilan énergétique pour une couche mince de section S comprise entre les abscisse x et $x+dx$ s'écrit en exprimant de deux façons la variation d'énergie interne dU. En notant μ la masse volumique et c la capacité thermique massique du verre :

$$dU = \left(j_x(x,t) - j_x(x+dx,t) \right) S\, dt = \mu c\, dT\, S\, dx \qquad \text{soit} \qquad -\frac{\partial j_x(x,t)}{\partial x} = \mu c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

Compte tenu de la loi de Fourier unidimensionnelle : $j_x(x,t) = -\lambda \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}$

L'équation de conservation de l'énergie devient : $\dfrac{\lambda}{\mu c} \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t}$

Cette équation de conduction thermique (« équation de la chaleur ») s'écrit encore, en posant $D = \dfrac{\lambda}{\mu c}$ (coefficient de diffusion thermique) : $D\dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t}$

b) Régime permanent.

« Permanent » signifie que le temps n'intervient plus. L'équation de diffusion thermique s'écrit alors : $\dfrac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$. Cela signifie que le gradient de température $\dfrac{dT(x)}{dx}$ est uniforme et sa valeur s'exprime comme le rapport de l'écart de température $T_e - T_i$ sur l'épaisseur e du vitrage :

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{T_e - T_i}{e} \qquad \text{ce qui implique :} \qquad T(x) = T_i - (T_i - T_e)\frac{x}{e}$$

c) Déterminer le flux thermique : $\Phi = j_x S = \lambda \dfrac{T_i - T_e}{e} S$.

Application numérique : pour une surface vitrée de $S = 12\ \text{m}^2$, $\Phi = \dfrac{0{,}8 \times 20 \times 12}{4 \times 10^{-3}} = 48\ \text{kW}$

d) Nombre de radiateurs ?

Pour développer 48 kW il faudrait donc 24 radiateurs « standard » de 2 kW.
Conclusion : Cela n'est pas bien réaliste : le modèle devra être revu. De toutes façons, il vaut mieux installer du double vitrage.

e) Économie réalisée en réduisant la température intérieure de 1°C.

L'économie de puissance serait alors $\Delta\Phi = \lambda \dfrac{\Delta\theta}{e} S = \dfrac{0{,}8 \times 1 \times 12}{4 \times 10^{-3}} = 2{,}4\ \text{kW}$ (soit un radiateur en moins)

Cette économie est d'autant plus importante que la pièce est mal isolée…

f) Résistance…

Résistance au passage de la chaleur (flux thermique) sous l'effet d'une différence de température (tension thermique) ou résistance au passage de l'électricité (flux électrique) sous l'effet d'une différence de potentiel électrique (tension électrique).
La notion d'impédance généralise le concept de résistance dans le cas des régimes variables sinusoïdaux en électricité ARQS.

Ici donc : $R_v = \dfrac{\Delta T}{\Phi} = \dfrac{e}{\lambda S}$

Application numérique : $R_v = 0,417 \times 10^{-3}\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}$

La relation équivalente en électricité définit la résistance électrique d'un conducteur cylindrique homogène de conductivité électrique γ, de section S et de longueur ℓ : $R_{\text{élec}} = \dfrac{\Delta V}{I} = \dfrac{\ell}{\gamma S}$

2) Prise en compte des échanges à la surface.

a) Unité du coefficient h ?

La loi de Newton s'écrit donc : $j = \dfrac{\Phi}{S} = h\left(T_i - T(0)\right)$. Il lui correspond l'équation aux dimensions suivante :

$[P] = [h][L]^2[\Theta]$, soit $[h] = [P][L]^{-2}[\Theta]^{-1}$. L'unité S.I. pour le coefficient h est donc le watt par mètre carré par kelvin $\left(\textit{symbole} : \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}\right)$.

b) Les simples vitrages se recouvrent souvent de buée…

La pression de vapeur saturante est fonction croissante de la température. Si l'air de la pièce, plus chaud, est saturé de vapeur d'eau, la pression partielle de la vapeur d'eau dans la couche limite au voisinage de la vitre dépasse la pression de vapeur saturante à cette température et il se produit donc une phénomène de condensation (changement de phase *vapeur* $\rightarrow$ *liquide* et plus rarement *vapeur* $\rightarrow$ *solide*).

Cela va dans le sens de la correction apportée au modèle car il s'agit de la preuve que la température de surface de la vitre est inférieure à la température de l'air.

c) Puissance surfacique émise par la vitre à l'extérieur.

La loi de Newton à l'extérieur s'exprime ainsi : $j = \dfrac{\Phi}{S} = h\left(T(e) - T_e\right)$

d) Analogie électrique.

$$j = \frac{\Phi}{S} = h\left(T_i - T(0)\right) = \frac{\lambda}{e}\left(T(0) - T(e)\right) = h\left(T(e) - T_e\right)$$

Nous avons donc successivement, de l'intérieur vers l'extérieur : $R_1 = \dfrac{1}{hS}$, $R_2 = \dfrac{e}{\lambda S}$ et $R_3 = \dfrac{1}{hS}$.

Les trois résistances thermiques sont traversées par le même flux thermique : elles sont donc en série, à l'instar de résistances électriques traversées par le même courant.

La résistance thermique totale est donc : $R = \dfrac{2}{hS} + \dfrac{e}{\lambda S}$ et nous avons $\Phi = \dfrac{T_i - T_e}{R}$

Applications numériques : $R = 0,0171\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}$; $\Phi = 1{,}17\ \mathrm{kW}$

e) Pertinence du modèle.

La résistance thermique a donc pour valeur $R = 0,0171\ \mathrm{K \cdot W^{-1}}$ et le flux thermique $\Phi = 1{,}17\ \mathrm{kW}$ peut être assuré par un seul radiateur.
Conclusion : ce modèle de conduction est bien plus pertinent que le précédent.

II) Double vitrage et isolation.

1) Isolation thermique par double vitrage.

a) Résistance thermique d'un double vitrage 4-10-4.

Sans tenir compte des échanges de surface, la résitance thermique du double vitrage a pour valeur :

$$R = \frac{2e}{\lambda_{\text{verre}} S} + \frac{e'}{\lambda_{\text{air}} S} \quad \text{soit } R = 0{,}0341\ \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

La résistance est 82 fois supérieure à celle d'un simple vitrage et le flux thermique est alors égal à 586 W et un seul radiateur suffira pour maintenir une température de 20°C à l'intérieur quand il fait 0°C à l'extérieur. Cette affirmation sera *a fortiori* exacte si l'on tient compte des échanges de surface.

Conclusion : équiper les fenêtres de double vitrage est une solution bien plus efficace que d'abaisser la température intérieure.

b) Les murs et leur matériau de construction doivent-ils rentrer en ligne de compte ?

Calculons tout d'abord les coefficients de transfert thermique k dans le cas du simple et du double vitrage (en tenant compte des échanges de surface) :

Simple vitrage : $k = \dfrac{2}{h} + \dfrac{e}{\lambda_{\text{verre}}} = 4{,}87\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Double vitrage : $k = \dfrac{2}{h} + \dfrac{2e}{\lambda_{\text{verre}}} + \dfrac{e'}{\lambda_{\text{air}}} = 1{,}64\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Dans le cas du double vitrage, la valeur obtenue est meilleure que les différentes valeurs proposées pour les matériaux constituant les murs : cela n'est pas utile de chercher une meilleure isolation. Par contre, il conviendra alors de tenir compte des murs et de leur matériau dans le calcul de l'isolation thermique.

2) Triple vitrage ?

À coût égal, les épaisseurs de matière étant les mêmes, un triple vitrage n'a pas davantage d'efficacité qu'un double.

3) Pont thermique

Les différents conducteurs thermiques sont dans ce cas soumis au même écart de température et ce sont alors les conductances thermiques, inverses des résistances, qui s'ajoutent :

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{\dfrac{d}{\lambda_1 S_1} + \dfrac{d}{\lambda_2 S_2}}$$

Dans le cas où $\lambda_1 \ll \lambda_2$, alors la conduction thermique peut se faire principalement par le matériau de conductivité λ_2 même si la surface S_2 est plus petite que S_1.