Deuxième problème : ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES (d'après Mines-Ponts 2006)

Ce problème concerne la propagation d'ondes électromagnétiques dans une fibre optique (domaine infrarouge proche).

Dans tout le problème, exprimer signifie donner l'expression littérale et calculer signifie donner la valeur numérique.

Données générales :

ε_0 *permittivité diélectrique du vide,* $\varepsilon_0 \approx 8,84\times10^{-12}\ \mathrm{F.m^{-1}}$

μ_0 *perméabilité magnétique du vide,* $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H.m^{-1}} \approx 1,26\times10^{-6}\ \mathrm{H.m^{-1}}$

c *vitesse de la lumière dans le vide,* $c \approx 3\times10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$ $\left(\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1\right)$.

On considère (Fig. 1) un guide d'ondes diélectrique constitué de deux cylindres concentriques de section circulaire, et constitués l'un et l'autre de matériau isolant (la silice). L'indice de réfraction de la partie centrale, appelée cœur, est noté n_1 (cet indice n'est pas nécessairement uniforme) ; l'indice de la partie périphérique, appelée gaine, est noté n_2, avec $n_2 < n_1$; l'indice de gaine est uniforme. Le milieu extérieur est l'air, assimilé au vide et donc d'indice égal à 1. On note f la fréquence des ondes, ω leur pulsation et $\lambda = \dfrac{c}{f}$ leur longueur d'onde dans le vide.

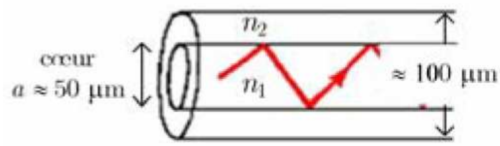


Fig. 1 - Guide d'ondes diélectrique

I - Fibre optique à saut d'indice

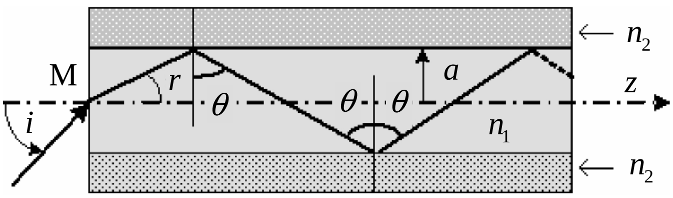


Fig. 2 – Fibre à saut d'indice. L'indice de cœur est noté n_1 et l'indice de gaine n_2.

Dans une fibre à saut d'indice, le cœur (de rayon a) et la gaine sont des milieux homogènes : n_1 et n_2 sont uniformes. On note z la direction générale de propagation (Fig. 2).

❑ **1** – Montrer que le rayon lumineux est guidé dans le cœur (c'est-à-dire qu'il n'en sort pas) si θ est supérieur à une certaine valeur, θ_L, que l'on exprimera en fonction de n_1 et de n_2. Calculer θ_L pour une fibre d'indice de cœur $n_1 = 1,456$ entourée d'une gaine d'indice $n_2 = 1,410$.

❑ **2** – On note i l'angle d'entrée du rayon à l'extérieur de la fibre (Fig. 2). Exprimer, en fonction de $\Delta = n_1 - n_2$ $\left(\Delta << n_2\right)$ et n_1, la valeur maximale de i (notée $i_{\max}$) pour que le guidage soit assuré dans la fibre. Calculer $\sin\left(i_{\max}\right)$ (appelée *ouverture numérique*).

Introduction aux questions 3 à 7

La condition $\theta > \theta_L$ est nécessaire mais non suffisante pour rendre compte du détail de la propagation dans la fibre. Anticipons sur les résultats de l'approche ondulatoire en introduisant, de manière empirique à ce stade, une phase associée aux rayons (Des travaux relativement récents justifient cette procédure, qui semble paradoxale) : les ondes planes associées aux rayons totalement réfléchis interfèrent. Seuls certains angles d'inclinaison satisfont une condition de phase qui construit une interférence identique tout le long de l'axe de propagation ; ils correspondent aux modes guidés. Considérons (Fig. 3) la direction de propagation parallèle à AB et à CD et le plan d'onde (π) relatif à cette direction. Pour qu'il y ait propagation, il faut que les champs correspondant à cette direction soient en phase.

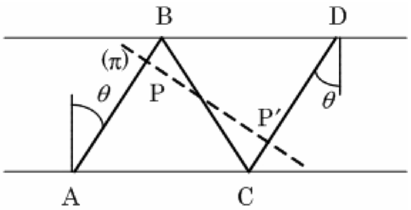


Fig. 3 – Rayons et plan d'onde.

❑ **3** – On ne tient pas compte de l'éventuel déphasage introduit par la réflexion sur l'interface cœur/gaine. Montrer alors que le déphasage φ entre l'amplitude de l'onde en P et l'onde en P′ s'exprime par $\varphi = 4\pi n_1 \dfrac{a}{\lambda_0}\cos(\theta)$.

❑ **4** – En déduire l'existence de modes de propagation, valeurs discrètes de θ notées θ_m où m est un entier, pour lesquelles la propagation est possible. Exprimer le nombre N_M de modes possibles, en fonction de n_1, n_2, a et λ. L'entier m est appelé l'ordre du mode.

❑ **5** – Le rayon de cœur a étant donné, démontrer l'existence d'une fréquence de coupure pour le mode d'ordre m. Préciser le comportement fréquentiel du dispositif.

❑ **6** – Le mode fondamental correspond, par définition, à $m = 0$. Exprimer, puis calculer pour $\lambda = 1,5\times10^{-6}$ m la valeur maximale que peut prendre a pour que seul ce mode se propage. On dit alors que la fibre est *monomode*.

❑ **7** – Soit $L = 1$ km la longueur de la fibre. Exprimer la différence ΔT de temps de parcours de l'entrée à la sortie, entre le trajet de durée minimale $(\theta = \pi/2)$ et le trajet maximal $(\theta = \theta_L)$. Donner l'expression approchée de ΔT en fonction seulement de L, Δ et c. On convient que le débit maximal de la fibre, $R_{\max}^{\text{saut}}$, est l'inverse de ΔT. Calculer $R_{\max}^{\text{saut}}$ (bits par seconde).

Introduction à la partie II

Dans les fibres optiques utilisées en télécommunications, un message (Fig. 4) est constitué d'une succession de signaux (on dit quelquefois impulsions) binaires (présence, $[0]$ ou absence $[1]$) de durée égale, δ. Le débit numérique maximal, exprimé en signaux par seconde, est alors $R_{\max}^{\text{saut.ind}} = \dfrac{1}{\delta}$.

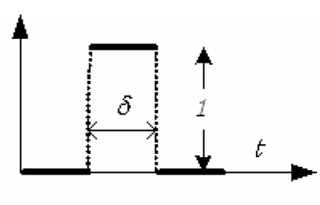


Fig. 4 - Le signal 010.

Divers phénomènes distordent les impulsions qui se propagent, ce qui entrave la reconstitution de l'information. On améliore la situation en utilisant une fibre dite *à gradient d'indice*. L'indice de réfraction est continu à l'intérieur de ce genre de fibre (En réalité, il est constant par morceaux autour de l'axe de révolution) ; il varie dans le cœur avec la distance r à l'axe Oz et il est constant dans la gaine $(r \geq a)$, avec la valeur n_2. L'indice dans le cœur (Fig. 5), est modélisé, pour $0 \leq r \leq a$, par $n(r) = n_1\sqrt{1 - \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2} F\left(\frac{r}{a}\right)}$, où F est monotone croissante sur $[0,1]$, avec $F(0) = 0$.

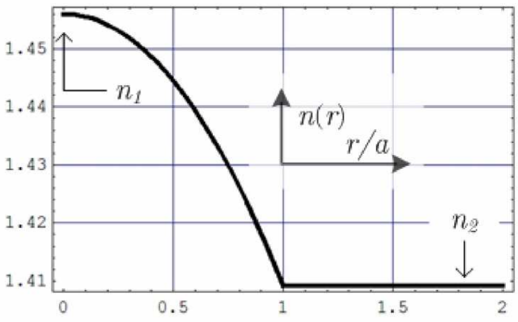


Fig. 5 – Un profil d'indice, $F(u) = u^2$.

II – Fibre optique à gradient d'indice

❑ **8** – On admet que la loi de Descartes est applicable de proche en proche, c'est-à-dire que $n(r)\sin[\theta(r)]$ est constant.

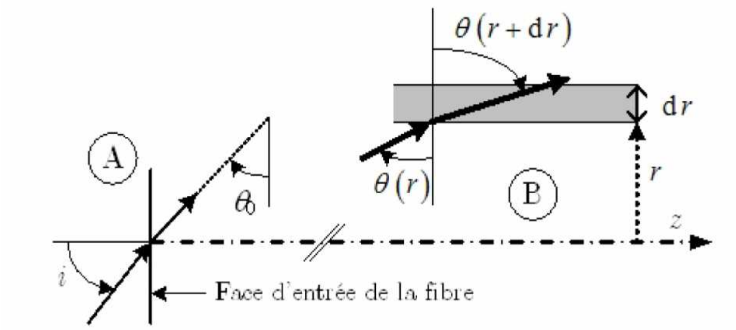


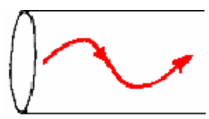
Fig. 6 – En A, représentation de l'angle externe d'entrée dans la fibre, i, et de l'angle interne θ₀ ; en B, représentation de la loi de Descartes dans un plan méridien et pour deux dioptres plans situés en r et en r+ dr.

Un rayon lumineux entre dans la fibre au centre de la face d'entrée, avec un angle externe d'incidence *i*. Il se dirige à l'intérieur de la fibre vers les r croissant avec un angle interne θ_0 au point ($z = 0^+$, $r = 0$), de sorte que $\sin(i) = n_1\cos(\theta_{0.})$. Montrer que ce rayon se propage dans un plan et que l'équation différentielle donnant sa trajectoire dans la fibre s'écrit

$$1 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2 = \frac{n^2(r)}{n_1^2 \sin^2\theta_o} \qquad [1].$$

❑ **9** – Quelle est la valeur de $F(1)$? Retrouver l'expression de l'ouverture numérique (*cf.* question 2), à partir de l'équation différentielle [1] et de l'expression générale de l'indice.

❑ **10** – En considérant le portrait de phase associé à [1], montrer que la trajectoire des rayons, $r(z)$, est une fonction périodique de z.



❑ **11** – Dans une fibre à gradient d'indice de longueur L, la différence de temps de parcours entre le trajet minimal et le trajet maximal est $\Delta T' = \frac{1}{2} n_1 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1}\right)^2 \frac{L}{c}$. Déduire de cette relation le débit numérique maximal (*cf.* question 8). Exprimer et calculer $\frac{R_{\max}^{\text{grad.ind.}}}{R_{\max}^{\text{saut}}}$.