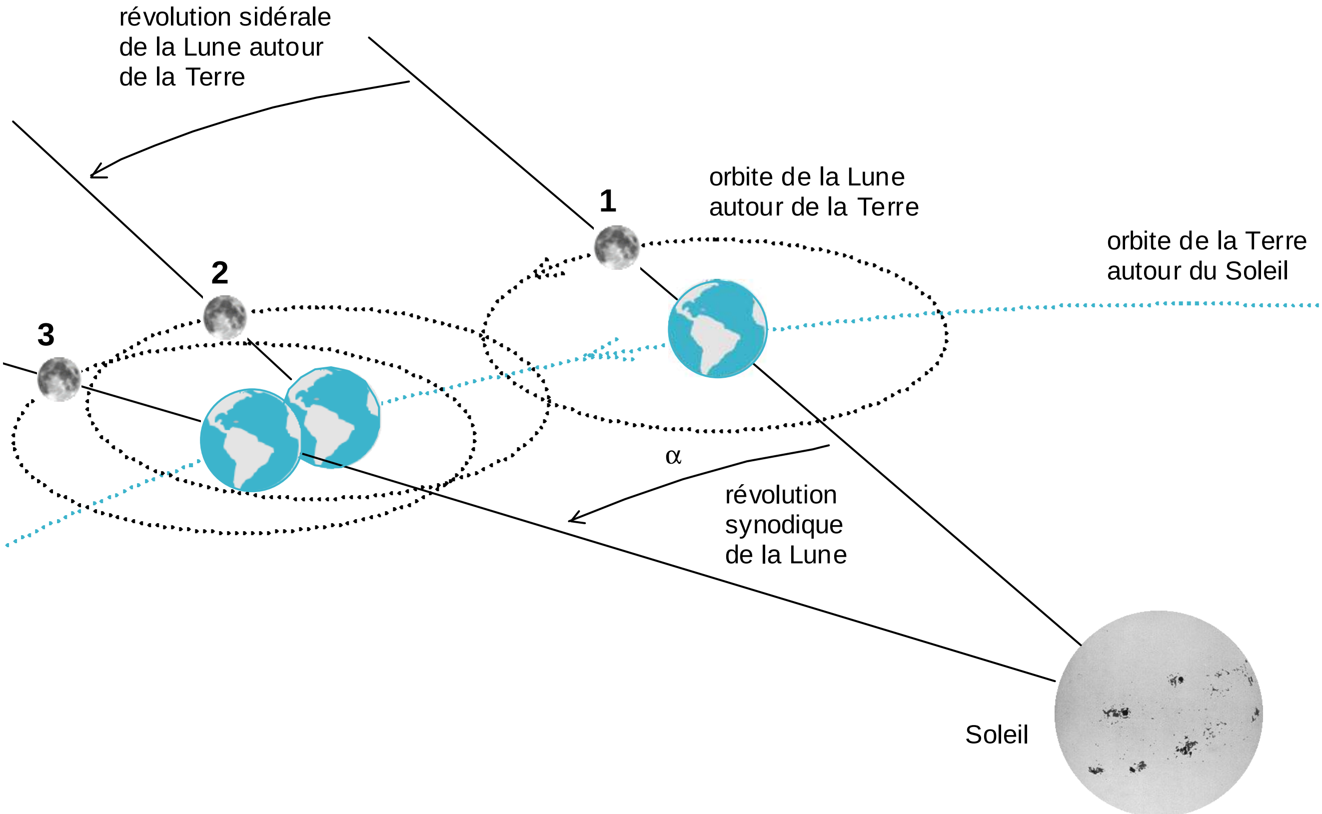
DS n°7-2 (conseillé pour les 3/2) : Samedi 15 mars 2008 (3 heures)
Ou DL n°9 (pour les 5/2) à remettre lundi 24 mars 2 008

Cinématique : révolutions sidérale et synodique de la Lune, orbites stationnaires.

Dans cet exercice toutes les orbites seront supposées coplanaires.

1. Dans un référentiel lié aux étoiles « fixes », la Lune tourne autour de la Terre selon un mouvement relatif que l'on supposera circulaire et uniforme de période T_{L} $(27{,}32\ \mathrm{j})$ tandis que la Terre tourne autour du Soleil selon un mouvement relatif de période T_{T} $(365{,}26\ \mathrm{j})$ que l'on supposera également circulaire et uniforme. Déterminer la période des phases de la Lune, encore appelée « période synodique », définie comme l'intervalle de temps séparant deux pleines-Lunes consécutives (la Terre est alors interposée entre le Soleil et la Lune qui nous montre sa face éclairée).



2. La Terre tourne sur elle-même d'un mouvement parfaitement uniforme en un jour sidéral ($T_{\mathrm{j\ sid}} = 23\ \mathrm{h}\ 56\ \mathrm{min}$). Déterminer le temps séparant deux passages successifs en un même méridien terrestre pour la Lune (jour lunaire $T_{\mathrm{j\ lune}}$) et pour le Soleil (jour solaire $T_{\mathrm{j\ sol}}$).

3. Dans le cas particulier des orbites circulaires, démontrer la troisième loi de Kepler : M étant la masse de l'astre central, G la constante de gravitation universelle, le rapport du cube du rayon de l'orbite d'un satellite sur le carré de sa période de révolution a pour valeur

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

(en cas d'échec de la démonstration, ce résultat sera admis pour la suite du problème)

4. La distance Terre-Lune étant égale à 385 000 km (valeur moyenne), déterminer la valeur numérique, dans le système international d'unités, du produit GM pour la Terre.
5. Il existe une solution d'orbite circulaire autour de la Terre telle que le satellite soit en permanence immobile par rapport à un même lieu sur Terre. Déterminer les caractéristiques de cette orbite *géostationnaire*. Quel peut être l'intérêt d'un tel satellite ?
6. Un satellite terrestre peut être *héliostationnaire*, l'angle Terre-satellite-Soleil étant alors constant. Déterminer les caractéristiques de cette orbite circulaire. Quel peut être l'intérêt d'un tel satellite ?
7. Le rapport des masses de la Lune et de la Terre a pour valeur $M_{\mathrm{L}}/M_{\mathrm{T}} = 0,0123$. De quelle façon les résultats précédents sont-ils modifiés si l'on ne néglige plus la valeur de ce rapport ?

Mécanique du point : étude de pendules de pesanteur

A. Pendule simple

Un pendule simple est formé d'une tige rigide OP, inextensible, de longueur L et de masse négligeable, pouvant tourner sans frottement autour d'un axe Δ passant par O et d'une masse ponctuelle m placée au point P. La position du pendule est repérée par l'angle θ que fait la tige avec la verticale.

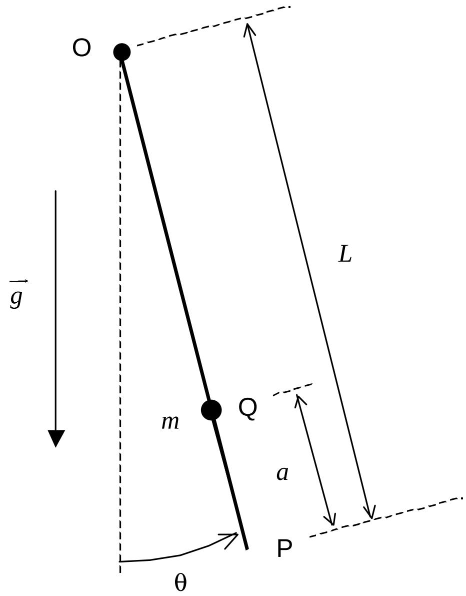
8. Déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit l'angle $\theta(t)$.
9. Résoudre cette équation différentielle dans le cas où le pendule est lâché sans vitesse initiale avec une faible amplitude $\left(\theta(0) = \theta_0 << 1 \text{ rad}\right)$.
10. Représenter la trajectoire de phase du pendule pour les conditions initiales de la question précédente.
11. Représenter sur un même graphe, pour les mêmes conditions initiales, les variations au cours du temps de l'énergie cinétique $E_k(t)$ et de l'énergie potentielle $E_p(t)$ du pendule, que l'on prendra soin de bien définir.
12. Dans le cas le plus général, l'amplitude n'étant plus nécessairement petite, déterminer une relation entre l'angle θ et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
13. Représenter le portrait de phase d'un tel pendule excité par élongation. On s'attachera à tracer de façon particulièrement précise les trajectoires de phase dans les cas particuliers $\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ et $\theta_0 = \pm\pi$.

B. Pendule sophistiqué

Un dispositif mécanique, que l'on ne cherchera pas à représenter, permet de faire passer la masse m du point P à un point Q, plus haut, tel que $\mathrm{OQ} = L - a$, en un temps très court que l'on pourra considérer comme infiniment petit par rapport à la période du pendule.

14. Le moment par rapport à O des forces intérieures nécessaires à cette manœuvre est nul. Montrer que la vitesse angulaire du point matériel de masse m passe instantanément de la valeur $\dot{\theta}_{\mathrm{P}}$ à la valeur $\dot{\theta}_{\mathrm{Q}}$ telle que $\dot{\theta}_{\mathrm{Q}}(L-a)^2 = \dot{\theta}_{\mathrm{P}}L^2$.

    (en cas d'échec de la démonstration, ce résultat sera admis pour la suite du problème)
15. A l'instant initial la masse m se trouve en P et l'on abandonne le pendule avec une vitesse initiale nulle $\left(\dot{\theta}(0) = 0\right)$ et une faible élongation $\left(\theta(0) = \theta_0 << 1 \text{ rad}\right)$. Lorsque le pendule atteint la position d'équilibre $(\theta = 0)$, la masse m passe de P à Q. Le pendule continue son mouvement et atteint l'élongation θ_1. Calculer θ_1.



16. Lorsque $\theta = \theta_1$, la masse m revient instantanément en P (sa vitesse angulaire est alors nulle et ne change par conséquent pas de valeur). Le pendule revient vers la position d'équilibre où la masse m passe à nouveau de P à Q. Le pendule continue son mouvement et atteint l'élongation θ_2. Calculer θ_2.

17. Lorsque $\theta = \theta_2$, la masse m revient instantanément en P et le mouvement se poursuit selon les mêmes séquences. Donner l'expression de l'élongation θ_n, toujours considérée comme « petite ». Comment varie au cours du temps l'énergie mécanique totale $E(t)$ de ce pendule ?