DS n°7-2bis (conseillé pour les 5/2) : Samedi 15 mars 2008 (3 heures)
Ou DL n°9 (pour les 3/2) à remettre lundi 24 mars 2008

Mécanique : conséquence de l'effet de Marée sur la distance Terre-Lune

Extrait du concours commun polytechnique MP 2003 (physique1, partie B)

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

Ce problème est formé de trois parties. La première partie étudie l'effet de marée exercé par la Lune sur la Terre. La seconde partie étudie l'orbite de la Lune autour de la Terre dans le cadre du système à deux corps. La dernière partie met en évidence, à partir de la conservation du moment cinétique total du système Terre Lune, le ralentissement de la rotation de la Terre sur elle-même provoqué par l'effet de marée et l'augmentation de la distance Terre Lune qui en résulte.

Notations et données numériques :

Constante gravitationnelle $\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2kg^{-2}}$

Masse du Soleil : $m_S = 1{,}99.10^{30}\,\mathrm{kg}$

Distance Terre Soleil : $D_S = 1{,}50.10^{11}\,\mathrm{m}$

Masse de la Lune : $m_L = 7{,}34.10^{22}\,\mathrm{kg}$

Distance moyenne Terre Lune : $D_L = 3{,}84.10^{8}\,\mathrm{m}$

Rayon de la Lune : $R_L = 1{,}75.10^{6}\,\mathrm{m}$

Masse de la Terre : $m_T = 5{,}98.10^{24}\,\mathrm{kg}$

Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}37.10^{6}\,\mathrm{m}$

Définition des différents référentiels et repères associés utilisés dans le problème :

On rappelle que le référentiel de Copernic, noté $\mathcal{R}$ dont l'origine est le centre de masse O du système solaire et les trois axes x, y, z pointent vers trois étoiles lointaines de la sphère céleste, réalise une excellente approximation d'un référentiel galiléen. Le repère associé est $\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$.

On note T, le centre de masse de la Terre et $\mathcal{R}_T$ le référentiel barycentrique de la Terre (ou référentiel géocentrique) de repère associé $\left(T,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$ avec $\vec{e_z}$: vecteur unitaire de l'axe des pôles.

On note L, le centre de masse de la Lune et $\mathcal{R}_L$ le référentiel barycentrique de la Lune (ou référentiel sélénocentrique) de repère associé $\left(L,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$.

Le Soleil, la Lune et la Terre sont supposés être sphériques à répartition de masse à symétrie sphérique.

I – Etude de l'effet de marée

1. Quel est le mouvement du référentiel géocentrique $\mathcal{R}_T$ dans le référentiel de Copernic si l'on suppose $m_L \ll m_T$? Dans ces conditions, $\mathcal{R}_T$ est-il galiléen ?

2. On considère une particule de masse m assimilée à un point matériel se trouvant au point P, au voisinage de la Terre à l'instant t. On appelle $\vec{F}$, la résultante des forces autres que les forces de gravitation et d'inertie s'exerçant sur la particule.
On note $\overrightarrow{G_S}(P)$, $\overrightarrow{G_L}(P)$, $\overrightarrow{G_T}(P)$, les champs gravitationnels créés respectivement en P par le Soleil, la Lune, et la Terre.

Les seuls astres contribuant au champ gravitationnel en P étant la Lune, la Terre et le Soleil, montrer que l'on peut écrire le principe fondamental de la dynamique pour la particule dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ sous la forme :
$m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = \vec{F} + m\overrightarrow{G_T}(P) + m\overrightarrow{G_L}(P) + m\overrightarrow{G_S}(P) - m\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$ où $\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T}$ et $\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$ désignent les accélérations des points P et T, respectivement dans $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}$.

3. On suppose $\vec{F} = \vec{0}$. M étant un point de la Terre, on montre qu'en faisant un développement de $\overrightarrow{G_S}(M)$ et de $\overrightarrow{G_L}(M)$ au voisinage de T, on peut écrire : $\overrightarrow{G_S}(M) = \overrightarrow{G_S}(T) + \left[\left(\overrightarrow{TM}\,.\,\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{G_S}\right]_T$ et $\overrightarrow{G_L}(M) = \overrightarrow{G_L}(T) + \left[\left(\overrightarrow{TM}\,.\,\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{G_L}\right]_T$ où $\left(\overrightarrow{TM}\,.\,\overrightarrow{grad}\right)$ est un opérateur appliqué à $\overrightarrow{G_S}$ ou $\overrightarrow{G_L}$, dont le résultat est calculé en T.

a) En considérant la Terre comme un système de points discrets A_i, de masse m_i, tels que $\sum_i m_i = m_T$, exprimer $\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}}$ en appliquant le théorème du centre d'inertie à la Terre.

b) Montrer alors que l'on peut écrire : $m\vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_T} = m\overrightarrow{G_T}(P) + m\overrightarrow{C_L}(P) + m\overrightarrow{C_S}(P)$ où $\overrightarrow{C_L}(P) = \overrightarrow{G_L}(P) - \overrightarrow{G_L}(T)$ représente le champ de marée dû à la Lune en P et $\overrightarrow{C_S}(P) = \overrightarrow{G_S}(P) - \overrightarrow{G_S}(T)$ représente le champ de marée dû au Soleil en P.

4. On suppose l'astre considéré (Soleil ou Lune), de centre A ($A = S$ ou $A = L$) de masse m_A situé à la distance D_A de T telle que $\overrightarrow{TA} = D_A\,\overrightarrow{e_x}$, dans le plan équatorial.
On considère les points P_1 et P_2 de la surface terrestre de coordonnées $(R_T, 0, 0)$ et $(-R_T, 0, 0)$ dans le repère associé au référentiel $\mathcal{R}_T$. En considérant que $\dfrac{R_T}{D_A} \ll 1$ évaluer le champ de marée $C_A(P_1)$ et $C_A(P_2)$. Quelle est la direction de ces deux vecteurs ? Faire un schéma.
Evaluer numériquement le terme $\dfrac{2\mathcal{G}\, m_A R_T}{D_A^3}$ dans le cas où l'astre A est le Soleil, puis la Lune.
Quel est l'astre qui a l'effet le plus important ?

II – Trajectoire de la Lune

On néglige les effets dus au Soleil ; le système Terre-Lune est donc considéré isolé et on s'intéresse aux mouvements relatifs de la Terre et de la Lune. On considère le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ du système Terre-Lune et on appelle C le centre de masse de l'ensemble.
$\overrightarrow{\Omega_L}$ et $\overrightarrow{\Omega_T}$ désignent le vecteur vitesse angulaire de rotation propre respectivement de la Lune dans $\mathcal{R}_L$ et de la Terre dans $\mathcal{R}_T$.

$J_L = \frac{2}{5} m_L R_L^2$ désigne le moment d'inertie de la Lune par rapport à son axe de rotation dans $\mathcal{R}_L$.

$J_T = \frac{2}{5} m_T R_T^2$ désigne le moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe de rotation dans $\mathcal{R}_T$.

On désigne par $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ le moment cinétique du système Terre-Lune dans le référentiel $\mathcal{R}^*$.

On désigne respectivement par $\overrightarrow{L_C^*}(T)$, $\overrightarrow{L_C^*}(L)$ les moments cinétiques au point C dans le référentiel $\mathcal{R}^*$ de la Terre, de la Lune.

$\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$ et $\overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$ sont respectivement, les vecteurs moments cinétiques de rotation propre de la Terre au point T dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ et de la Lune au point L dans le référentiel $\mathcal{R}_L$.

1. a) Montrer que $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ se conserve.

b) La répartition de masse de la Lune et la Terre étant à symétrie sphérique, montrer que $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$ et $\overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$ se conservent. En déduire que $\overrightarrow{\Omega_T}$ et $\overrightarrow{\Omega_L}$ sont constants.

2. a) En considérant la Terre comme un système de points discret, montrer que : $\overrightarrow{L_C^*}(T) = \overrightarrow{CT} \wedge m_T \overrightarrow{V_{T/\mathcal{R}^*}} + \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$ où $\overrightarrow{V_{T/\mathcal{R}^*}}$ représente le vecteur vitesse de T dans le référentiel $\mathcal{R}^*$.

b) Donner la relation analogue pour $\overrightarrow{L_C^*}(L)$.

c) En déduire que $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ peut se mettre sous la forme :
$\overrightarrow{L^*}(T,L) = \overrightarrow{L_{orb}^*} + \overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$ où $\overrightarrow{L_{orb}^*}$ désigne le moment cinétique orbital dans $\mathcal{R}^*$ du système Terre-Lune. Exprimer $\overrightarrow{L_{orb}^*}$ en fonction de $\overrightarrow{CT}$, m_T, $\overrightarrow{V_{T/\mathcal{R}^*}}$ et de $\overrightarrow{CL}$, m_L, $\overrightarrow{V_{L/\mathcal{R}^*}}$.

3. On appelle M la particule fictive, telle que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{TL}$ de masse réduite $\mu = \frac{m_T m_L}{m_T + m_L}$ de vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}^*}}$.

a) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{CL}$ et $\overrightarrow{CT}$ en fonction de m_T, m_L et $\overrightarrow{TL}$. En déduire les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_{T/\mathcal{R}^*}}$ et $\overrightarrow{V_{L/\mathcal{R}^*}}$ des points T et L dans le référentiel $\mathcal{R}^*$, en fonction de $\overrightarrow{V_{M/R^*}}$.

b) Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}^*$ pour L et T, et montrer que cela revient à considérer la particule fictive soumise à la force exercée par la Terre sur la Lune.

4. a) Exprimer $\overrightarrow{L_{orb}^*}$ en fonction de $\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}^*}}$ et μ. Montrer alors que le mouvement de la particule fictive est plan.

b) En considérant que $m_T >> m_L$, à quels points peut-on assimiler les points C et M ? Avec quel référentiel peut-on confondre $\mathcal{R}^*$?

5. On suppose la condition précédente remplie. On se place dans le plan de la trajectoire de L et on introduit le repère des coordonnées polaires $(T, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ tel que $\overrightarrow{TL} = r\,\overrightarrow{e_r}$.

a) Etablir par la méthode de votre choix l'équation différentielle suivie par $u(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)}$.
Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}$ où l'on donnera les significations de p et e.

b) Le périgée est caractérisé par $r_p = 363\,000\,\text{km}$ et l'apogée par $r_a = 405\,000\,\text{km}$. Calculer p et e.

c) Montrer que la trajectoire de la Lune autour de la Terre peut être assimilée à un cercle dont on donnera le rayon D_L. Calculer la vitesse angulaire orbitale ω_L de la Lune autour de la Terre, puis la vitesse v_L de la Lune sur son orbite par rapport au référentiel $\mathcal{R}_T$.

6. a) Evaluer numériquement le moment cinétique orbital $\overrightarrow{L^*_{orb}}$, ainsi que les moments cinétiques de rotation propre $\overrightarrow{L_T}(T)_{/\mathcal{R}_T}$, $\overrightarrow{L_L}(L)_{/\mathcal{R}_L}$ et les comparer entre eux.

Données : $\Omega_L = 2{,}66\ 10^{-6}\,\text{rad s}^{-1}$ $\Omega_T = 7{,}29\ 10^{-5}\,\text{rad s}^{-1}$

b) En supposant les vecteurs $\overrightarrow{\Omega_T}$ et $\vec{\omega}_L$ colinéaires et dirigés suivant $\overrightarrow{e_z}$, montrer alors que l'on peut écrire : $\overrightarrow{L^*}(T,L) \approx \left(m_L\sqrt{\mathcal{G}\,D_L m_T} + J_T\Omega_T\right)\overrightarrow{e_z}$.

III – Eloignement de la Lune

En généralisant à un point quelconque de la Terre, le calcul fait dans la partie I, on peut montrer que l'effet de marée se traduit par l'existence de deux bourrelets diamétralement opposés, alignés avec la ligne des centres de l'astre A et de la Terre.
En fait, les bourrelets de marée sont entraînés par la rotation de la Terre, plus rapide que le mouvement de la Lune sur son orbite et se trouvent donc décalés par rapport à la direction Terre-Lune d'un angle α (voir figure 7). La Lune exerce alors une action dont le moment sur les bourrelets tend à freiner la rotation de la Terre. Le système Terre-Lune étant toujours considéré isolé dans l'espace, son moment cinétique total $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ se conserve. La diminution du moment cinétique de rotation propre de la Terre est alors compensée par une augmentation du moment cinétique orbital de la Lune et donc par une augmentation progressive de la distance Terre-Lune. Cette troisième partie veut quantifier cet effet.

1. La surface de la Terre étant essentiellement recouverte par les océans, on modélise le phénomène des marées par deux bourrelets d'eau symétriques de hauteur h formant un ellipsoïde tangent à la sphère terrestre (voir figure 7). Calculer la masse m_b de l'ensemble des deux bourrelets.

Données : Volume d'un ellipsoïde de demi grand axe a et de demi petit axe b : $V = \dfrac{4}{3}\pi a b^2$
Masse volumique de l'eau : $\rho = 1000\ \text{kg m}^{-3}$ $h = 0{,}50\,\text{m}$

2. On admettra que le moment en T des forces exercées par la Lune sur l'ensemble (Terre sphérique + bourrelets) $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ peut s'écrire en première approximation $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_1} + \overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ où $\overrightarrow{\mathcal{M}_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_2}$ sont les moments en T des forces $\overrightarrow{F_1} = \dfrac{m_b}{2}.\overrightarrow{C_L}(P_1)$ et $\overrightarrow{F_2} = \dfrac{m_b}{2}.\overrightarrow{C_L}(P_2)$ résultant de l'action de la Lune sur les points P_1 et P_2 de masse $\dfrac{m_b}{2}$ situés sur la droite de déformation maximale formant l'angle α avec l'axe $\overrightarrow{e_r}$.
Exprimer $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ en fonction de m_b et des vecteurs $\overrightarrow{G_L}(P_1)$, $\overrightarrow{G_L}(P_2)$ et $\overrightarrow{TP_1}$.

3. On admettra qu'en faisant l'hypothèse que $\dfrac{R}{D_L} << 1$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ peut s'écrire : $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \dfrac{-A \ \sin(2\alpha)}{D_L^3}\,\overrightarrow{e_z}$ où $A = \dfrac{3}{2}\mathcal{G} \ \ m_b . m_L . (R+h)^2$. On obtient pour $\alpha = 3°$, $\|\vec{M}\| = \mathcal{M} = 4,5.10^{16}$ SI.

a) J_T gardant la même valeur définie dans la partie II, exprimer alors $\dfrac{d\Omega_T}{dt}$ et calculer sa valeur numérique.

b) On appelle T la période de rotation propre terrestre. Exprimer $\dfrac{dT}{dt}$ en fonction de Ω_T et $\dfrac{d\Omega_T}{dt}$ et calculer sa valeur numérique en secondes par an avec $\Omega_T = 7,29.10^{-5}\,\text{rad s}^{-1}$. Comparer avec la valeur observée qui est de $1,65.10^{-5}$ secondes par an.

c) En considérant l'expression du moment cinétique total $\overrightarrow{L^*}(T,L)$ du II-6-b, donner l'expression de $\dfrac{d(D_L)}{dt}$ et calculer sa valeur numérique en cm par an. Comparer avec la valeur observée qui est de 3,4 cm par an.

Figure 7