ÉLECTROCINÉTIQUE

Chapitre 1

L'approximation des régimes quasi stationnaires

1.1. Les sources du champ électromagnétique

Charges électriques

L'électricité et, plus généralement l'électromagnétisme, traite de l'effet des charges électriques présentes dans la matière, ces charges sont quantifiées et portées par les corpuscules microscopiques constituant la matière ordinaire (électrons, noyaux atomiques, ions, etc.). Toutefois, le plus souvent, nous ignorerons volontairement l'existence de cette échelle microscopique pour ne considérer les charges que d'un point de vue macroscopique.

La ***densité volumique de charge*** $\rho\left(\vec{r}, t\right)$ est définie à chaque instant et en chaque point de l'espace comme une grandeur locale « mésoscopique ». Cela signifie que l'on inventorie les charges présentes dans une portion d'espace très petite par rapport à l'échelle du circuit électrique (échelle macroscopique) et cependant très grande par rapport à l'échelle des atomes (échelle microscopique).

$$\left\{\begin{matrix}\text{microscopique}\\ \text{(atomes)}\end{matrix}\right\} << \textit{mésoscopique} << \left\{\begin{matrix}\text{macroscopique}\\ \text{(laboratoire)}\end{matrix}\right\}$$

Nous utiliserons une notation différentielle pour désigner le volume $\delta\tau$ de cette portion d'espace et la charge δq contenue dans ce volume. La densité volumique de charge locale est alors définie par le rapport :

$$\rho = \frac{\delta q}{\delta \tau} = \lim_{\tau \to \textit{mésoscopique}} \frac{\sum_{\tau} q_i}{\tau}$$

Remarque : le même principe préside à la définition de la densité volumique de masse qui est également une grandeur mésoscopique, avec une grande différence toutefois : les masses sont fondamentalement positives et l'addition de particules élémentaires dans un volume donné produit systématiquement une augmentation de la masse tandis que les charges électriques sont algébriques et ne présentent donc pas ce caractère cumulatif. Dans un volume mésoscopique $\delta\tau$ il peut très bien se trouver des charges positives et négatives en quantité égales de telle sorte que la densité volumique résultante soit nulle : c'est le cas dans la matière électriquement neutre.

Les grandeurs q et τ sont des grandeurs extensives. Une région de l'espace de volume τ[1] peut être analysée comme une partition (réunion des sous ensembles disjoints) de volumes élémentaires $d\tau$.

---

[1] En électromagnétisme le symbole V est réservé pour représenter le potentiel. Nous éviterons systématiquement l'usage de ce symbole pour les volumes.

La charge q contenue dans le volume τ peut alors s'écrire sous la forme d'une intégrale de volume :

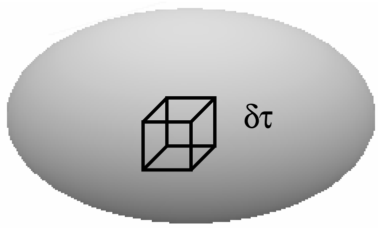
$$q = \iiint_\tau \rho \, \delta\tau$$

Le volume τ étant défini de façon invariante dans le temps, l'intégrale sur un volume fini d'une fonction de l'espace et du temps est une fonction du temps. Cela s'écrit, en coordonnées cartésiennes, avec les notations usuelles :

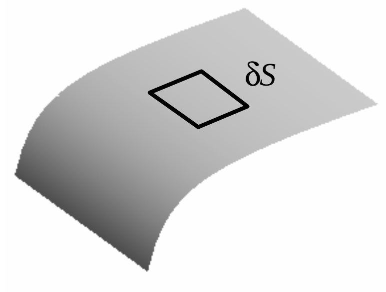
$$q(t) = \iiint_\tau \rho(x,\, y,\, z,\, t) \; \delta x \, \delta y \, \delta z$$

Remarque : le rapport ρ de la charge élémentaire δq et du volume élémentaire $\delta\tau$ n'a rien à voir avec une dérivée. Cela justifie l'utilisation du symbole « δ » à la place du symbole différentiel usuel « d » pour désigner une grandeur extensive considérée à l'échelle mésocopique.

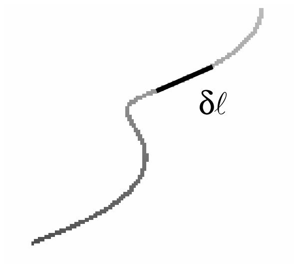
Selon le même principe, lorsque des charges sont réparties sur une surface ou sur une ligne, nous définirons une ***densité surfacique de charge*** σ ou une ***densité linéique de charge*** λ en un point de cette surface ou de cette ligne par les relations $\delta q = \sigma \; \delta S$ ou $\delta q = \lambda \; \delta \ell$.



Volume τ



Surface S



Ligne C

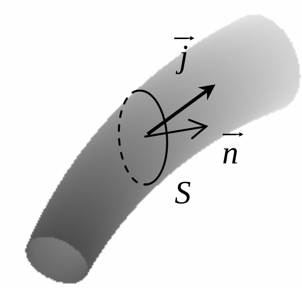
Courants électriques

Nous étudierons les lois de l'électromagnétisme dans des référentiels galiléens (pour la définition de ces référentiel, voir le cours de mécanique). Dans un référentiel particulier certaines charges électriques peuvent être immobiles (charges statiques) et d'autres peuvent être en mouvement (charges mobiles).

Les charges mobiles définissent des courants électriques que l'on caractérisera en chaque point de l'espace par un vecteur ***densité de courant*** $\vec{j}$

$$\vec{j} = \lim_{\tau \to \textit{mésoscopique}} \frac{\sum_\tau q_i \vec{v}_i}{\tau}$$

Les courbes de l'espace en tous points tangentes au vecteur densité de courant sont les ***lignes de courant*** électrique. Des lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée définissent un ***tube de courant***.

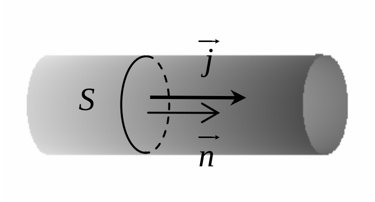


$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \; \delta S$$

Nous définissons l'***intensité électrique*** i à travers une section S d'un tube de courant comme le flux du vecteur densité de courant à travers cette surface.

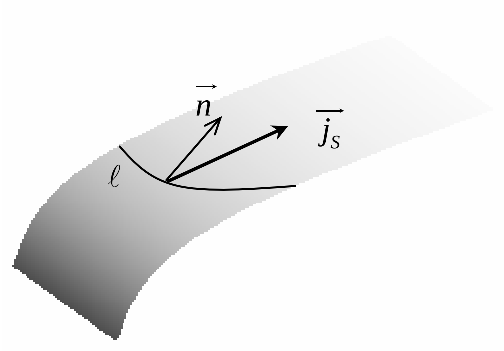
Rappelons que la définition d'un flux suppose que la surface S soit orientée, c'est-à-dire que l'on ait défini un champ de vecteurs unitaires normaux $\vec{n}$.

Cas particulier : dans le cas d'une distribution de courant uniforme en volume, le vecteur $\vec{j}$ ayant même valeur en tout point de l'espace, l'intensité électrique i à travers une section S orthogonale au courant et orientée dans le sens de $\vec{j}$ est égale au produit du module $j = \left|\vec{j}\right|$ de la densité de courant par la surface S.



$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}\, \delta S = j\, S$$

Selon le même principe, lorsque des charges surfaciques sont en mouvement, nous définirons une ***densité de courant de surface*** $\vec{j_S}$. On ne parle plus alors de tube de courant, mais de *nappe de courant* et l'intensité électrique est définie comme un *flux unidimensionnel* à travers une ligne de frontière :



$$i = \int_\ell \vec{j_S} \cdot \vec{n}\, \delta\ell$$

$\vec{n}$ est un vecteur unitaire orthogonal à frontière, dans le plan de la nappe de courant

Dans le cas particulier d'une distribution de courant uniforme en surface, le vecteur $\vec{j_S}$ ayant même valeur en tout point, l'intensité électrique i à travers une section ℓ orthogonale au courant et orientée dans le sens de $\vec{j_S}$ est égale au produit du module $j_S = \left|\vec{j_S}\right|$ de la densité de courant de surface par la longueur ℓ de la frontière : $i = j_S\, \ell$

Attention ! Une densité de courant $\vec{j}$ est homogène à un courant divisé par une surface $\left([j] = [\mathrm{I}][\mathrm{L}]^{-2}\right)$ tandis qu'une densité de courant de surface $\vec{j_S}$ est homogène à un courant divisé par une longueur $\left([j_S] = [\mathrm{I}][\mathrm{L}]^{-1}\right)$. Il serait faux de parler de densité volumique ou de densité surfacique de courant.

Conservation de la charge électrique

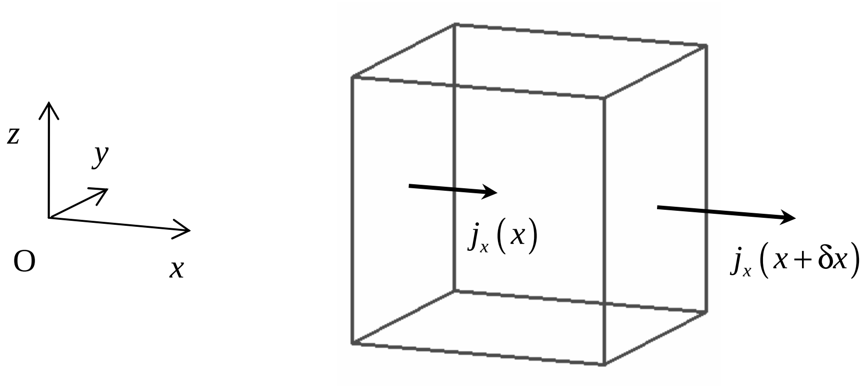
Voici bien une loi de physique des plus faciles à énoncer. Cette loi a survécu à toutes les révolutions conceptuelles du vingtième siècle, ni la réalité relativiste, ni la réalité quantique n'ont mis cette affirmation simple en défaut : la charge électrique, en toutes circonstances, est fondamentalement conservative.

Considérons un volume élémentaire $\delta\tau = \delta x\, \delta y\, \delta z$ construit à partir d'un point $\mathrm{M}(x, y, z)$ situé dans une région d'espace uniformément chargée par une densité de charge ρ et imaginons un courant électrique permanent se propageant dans la direction Ox.

Il est clair que si ce courant est uniforme, il sortira autant de charges électriques par la face d'abscisse $x+\delta x$ qu'il n'en rentre par la face d'abscisse x et la charge contenue dans le volume $d\tau$ sera invariante.

Par contre, si le courant de direction Ox est une fonction croissante de x, il sortira davantage de charges par la face d'abscisse $x+\delta x$ qu'il n'en rentre par la face d'abscisse x et la charge contenue dans le volume $\delta\tau$ sera décroissante, le courant algébrique sortant ayant alors pour expression :

$$\delta i = \left[j_x\left(x+\delta x\right) - j_x\left(x\right)\right]\delta y\,\delta z$$



Ce courant sortant doit se traduire par une variation algébrique de la charge électrique $\rho\, d\tau$ contenue dans le volume $\delta\tau$ et, par conséquent, par une variation au cours du temps de la densité volumique de charge. Pour un intervalle de temps $t \cdot\cdot t+dt$, cela s'écrit :

$\delta q = d\rho\,\delta\tau = -\delta i\, dt$, soit : $$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{j_x\left(x+\delta x\right) - j_x\left(x\right)}{\delta x} = -\frac{dj_x}{dx}$$

Dans le cas plus général où ρ est fonction du temps et de l'espace il faudra considérer la dérivée partielle de ρ par rapport au temps. De plus, si le courant a une direction quelconque, il faudra prendre en compte de la même façon les variations de la composante j_y dans la direction Oy ainsi que les variations de la composante j_z dans la direction Oz. Nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$$

Dans cette formule, nous reconnaissons l'expression, en coordonnées cartésiennes, de la divergence du vecteur densité de courant :

$$\mathrm{div}\,\vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

La conservation de la charge électrique, loi fondamentale de l'électromagnétisme, se traduit par la satisfaction en tout point de l'espace (au sens mésoscopique du terme) et à tout instant de l'***équation de continuité*** :

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0}$$

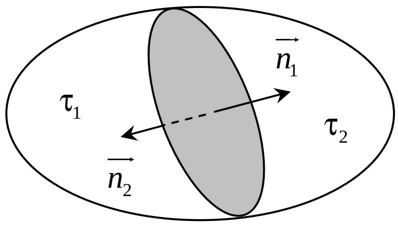
Théorème de Green-Ostrogradski

L'appellation « divergence » a une signification physique assez simple : un champ de vecteur a une divergence positive en un point lorsqu'il présente autour de ce point des composantes radiales positives à l'image du champ des vecteurs vitesses d'écoulement autour d'une source en hydrodynamique. Les lignes de courant divergent alors à partir du point source.

Indépendamment d'un système particulier de coordonnées, la divergence d'un champ de vecteur $\vec{v}$ est définie plus généralement comme une densité volumique locale de flux sortant. Si l'on considère un volume élémentaire $\delta\tau$ autour d'un point M, le flux élémentaire $\delta\Phi$ sortant du volume $\delta\tau$ a pour valeur $\delta\Phi = \operatorname{div}\vec{v}\,\delta\tau$.

Le flux sortant est une grandeur extensive : si l'on considère deux volumes τ_1 et τ_2 adjacents, le flux sortant du volume somme $\tau = \tau_1 \oplus \tau_2$ est égal à la somme des flux sortants des volumes τ_1 et τ_2.

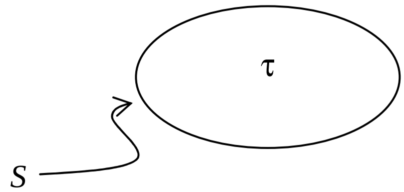
En effet, le flux à travers la surface d'interface entre les volumes τ_1 et τ_2 est compté deux fois avec des valeurs algébriques opposées.



$$\Phi_{\tau_1 \oplus \tau_2} = \Phi_{\tau_1} + \Phi_{\tau_2}$$

Cette propriété se généralise sous la forme intégrale du ***théorème de Green-Ostrogradski*** : le flux sortant d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ de vecteur étendue au volume intérieur à cette surface.

$$\Phi = \int \delta\Phi \qquad \text{soit} \qquad \unicode{x222F}_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\delta S = \iiint_\tau \operatorname{div}\vec{v}\,\delta\tau$$



Remarque : Le symbole intégral est orné d'un cercle pour rappeler que la surface S est une surface fermée.

Remarque : On dit qu'un champ de vecteur $\vec{v}$ est à flux conservatif lorsque le flux de $\vec{v}$ à travers toute surface fermée est nul à tout instant. D'après le théorème de Green-Ostrogradski, cela revient à dire que la divergence d'un tel champ de vecteur est nulle en tout point de l'espace et à tout instant.

$$\vec{v}\left(\vec{r},t\right) \text{ est à flux conservatif } \Leftrightarrow \unicode{x222F}_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\delta S = 0,\ \begin{cases}\forall S \text{ (fermée)}\\ \forall t\end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{div}\vec{v} = 0,\ \begin{cases}\forall \vec{r}\\ \forall t\end{cases}$$

Retour sur la conservation de la charge

L'équation de continuité est satisfaite en tout point de l'espace. Si nous intégrons une grandeur scalaire nulle sur un domaine fini nous obtenons une somme nulle.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \text{ en tout point de l'espace} \Rightarrow \iiint_\tau \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}\right)\delta\tau = 0 \text{ quelque soit le volume } \tau.$$

La première partie de l'intégrale correspond à la dérivée par rapport au temps de la charge $q(t)$ contenue dans le volume τ :

$$\iiint_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta\tau = \frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho\,\delta\tau = \frac{dq(t)}{dt}$$

La deuxième partie de l'intégrale correspond, par application du théorème de Green-Ostrogradski, à l'intensité électrique sortante du volume τ :

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div}\vec{j}\,\delta\tau = \oiint_{S} \vec{j}\cdot\vec{n}\,\delta S = i_{\text{sortant}}$$

La forme intégrale de l'équation de continuité s'écrit donc : $\dfrac{dq(t)}{dt} + i_{\text{sortant}} = 0$

L'interprétation en est fort simple : toute augmentation de la charge électrique contenue dans une portion d'espace ne peut être due qu'à un courant électrique entrant. La satisfaction universelle de l'équation de continuité implique la valeur universelle du principe de conservation de la charge électrique.

1.2. Définition de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

Peut-on parler du courant dans un fil électrique ?

En électrocinétique nous avions admis que l'intensité électrique était la même à un même instant pour toute section d'un conducteur filiforme : c'est la condition pour que l'on puisse légitimement parler de l'intensité du courant électrique dans un fil sans autre précision. Un tel conducteur s'identifie à un tube de courant et l'affirmation précédente revient à admettre que le vecteur densité de courant a pour propriété d'avoir un flux conservatif, c'est-à-dire que sa divergence est nulle en tout point de l'espace et à tout instant : $\operatorname{div}\vec{j} = 0$.

L'équation de continuité nous apprend que cette propriété est vérifiée en régime stationnaire, lorsque rien ne dépend du temps : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{j} = 0$.

L'équation de continuité nous apprend aussi que cette propriété *n'est pas* vérifiée dans le cas le plus général. Nous dirons que l'on est dans l'approximation des régimes quasi stationnaires si les variations dans le temps sont suffisamment lentes pour que l'on puisse parler, à un instant donné, de l'intensité du courant dans un conducteur sans préciser à travers quelle section particulière de ce conducteur.

Remarque : cela revient à dire que, dans le cadre de l'ARQS, l'électricité est considérée comme un fluide incompressible : tout ce qui entre à une extrémité d'un tuyau ressort immédiatement à l'autre extrémité.

Remarque : aucune information ne peut se propager à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide. Si l'on considère un signal électrique sinusoïdal de période *T*, la dimension caractéristique du montage électrique ℓ devra nécessairement être très inférieure à *cT* pour que l'on puisse envisager d'appliquer l'ARQS.

Applications numériques :

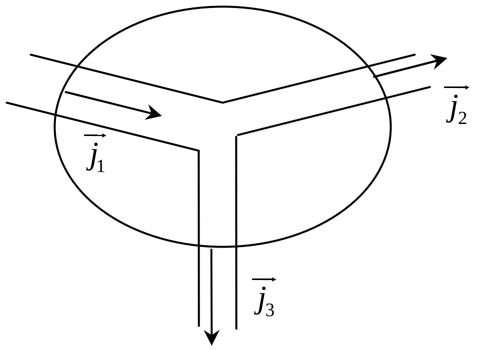
1- Avec $c = 3\times10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, pour une fréquence $\nu \le 10\ \text{MHz}$, soit $T \ge 10^{-7}\ \text{s}$, cela conduit à la condition $\ell \ll 30\ \text{m}$ généralement satisfaite dans le domaine de l'électronique.

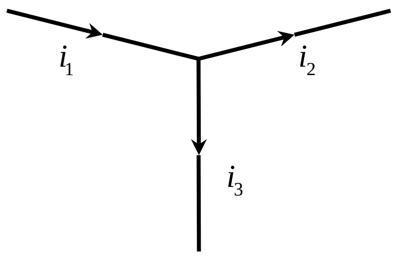
2- Pour une fréquence $\nu = 50\ \text{Hz}$ (fréquence du courant de secteur), la condition s'écrit : $\ell \ll 6\,000\ \text{km}$. Si cette condition est largement satisfaite à l'échelle d'une installation électrique locale, elle ne l'est pas si l'on considère le problème de la distribution de l'énergie électrique à l'échelle du continent européen.

Lois de Kirchhoff

Loi des nœuds

La conservation de la charge électrique dans le cadre de l'ARQS se traduit donc par le ait que le flux de $\vec{j}$ est conservatif. Cela revient à dire que, dans le cadre de l'ARQS, l'intensité sortante d'une surface fermée est toujours algébriquement nulle.





La traduction de cela en terme de circuits filiformes correspond à la ***loi des nœuds*** : la somme algébrique des courants divergents à partir d'un nœud d'un réseau est nulle. Il suffit, pour s'en persuader, de considérer une surface fermée entourant le nœud.

$$\oiint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} \vec{j}_1\cdot\vec{n}_1\,\delta S + \iint_{S_2} \vec{j}_2\cdot\vec{n}_2\,\delta S + \iint_{S_3} \vec{j}_3\cdot\vec{n}_3\,\delta S = 0 = -i_1 + i_2 + i_3$$

Attention ! La loi des nœuds *n'est pas* une loi fondamentale de l'électromagnétisme. Sa validité est restreinte au cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires.

Loi des mailles

Le potentiel scalaire V se définit et se calcule de la même façon dans le cadre de l'ARQS qu'en électrostatique. L'origine des potentiels étant choisie, le potentiel est défini en chaque point de l'espace et l'on peut évoquer la tension u ou différence de potentiel entre deux points.

Dans le cas particulier des circuits filiformes, l'existence du potentiel scalaire se traduit par la ***loi des mailles*** : la somme algébrique des tensions aux bornes des dipôles d'une maille est nulle (à la condition bien sûr de choisir un sens de parcours de la maille et de compter toutes les tensions dans le même sens).

1.3. Les champs électrique et magnétique dans l'ARQS

Le champ électrique dans l'ARQS, en l'absence de phénomènes d'induction

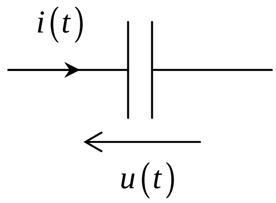
En l'absence de phénomènes d'induction, la relation entre le potentiel et le champ électrique est la même qu'en électrostatique.

Notons de plus que le champ électrique obéit au ***théorème de Gauss***. Cette propriété, nous le verrons plus loin dans ce cours, est une loi générale de l'électromagnétisme et sera vérifiée y compris en dehors de l'ARQS.

Condensateurs électriques

Considérons l'exemple du condensateur idéal dont la caractéristique en convention récepteur correspond à une équation différentielle linéaire :

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$



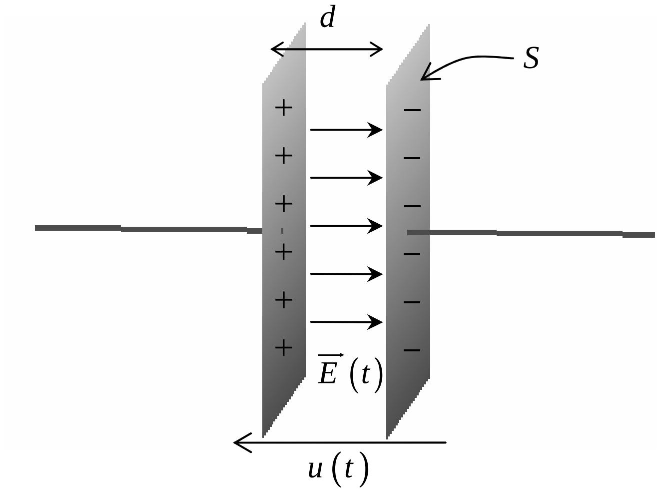
Si l'on est en régime variable dans le cadre de l'ARQS, la tension électrique aux bornes du condensateur pourra s'exprimer comme la circulation du champ électrique entre les armatures, exactement comme en électrostatique.

Retenons le cas très simplifié du condensateur plan idéal pour lequel on considère que le champ électrique est uniforme entre les armatures.

Dans ce cas, la tension aux bornes du condensateur est égale à la circulation du champ électrique entre les armatures. Si l'on note d la distance entre les armatures, cela s'écrit : $u(t) = E(t)d$.

Par application du théorème de Gauss, on démontre simplement l'expression du champ électrique : $E(t) = \dfrac{q(t)}{\varepsilon_0 S}$, où S représente la surface des armatures en regard. La capacité du condensateur est définie comme le rapport de la charge sur la tension, ce qui donne ici :

$$C = \frac{q(t)}{u(t)} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$



Attention ! En présence de phénomènes d'induction, la relation entre le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel doit être modifiée et la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ qui prévalait en électrostatique n'est plus satisfaite.

Le champ magnétique et les phénomènes d'induction dans l'ARQS

Nous avons déjà défini le champ magnétique $\vec{B}$ produit par les courants dans le cadre de la magnétostatique (hypothèse stationnaire). Dans le cadre de l'ARQS, le champ $\vec{B}$ se définit de la même façon et a les mêmes propriétés que dans le cadre de la magnétostatique.

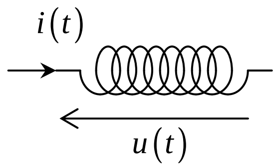
En particulier, le champ $\vec{B}$ est à flux conservatif (cette propriété est une loi générale de l'électromagnétisme et sera vérifiée y compris en dehors de l'ARQS).

Le ***théorème d'Ampère***, introduit en magnétostatique s'applique encore dans le cadre de l'ARQS. Nous le verrons plus loin dans ce cours, le théorème d'Ampère n'est pas une loi générale de l'électromagnétisme.

Bobines d'induction

Les phénomènes d'induction feront l'objet d'une étude particulière dans le cadre de ce cours, mais, dans un premier temps, ils apparaîtront dans l'étude des circuits filiformes par l'existence des composants inductifs que sont les bobines. Notons en particulier le cas de la bobine idéale dont la caractéristique en convention récepteur correspond à une équation différentielle linéaire :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

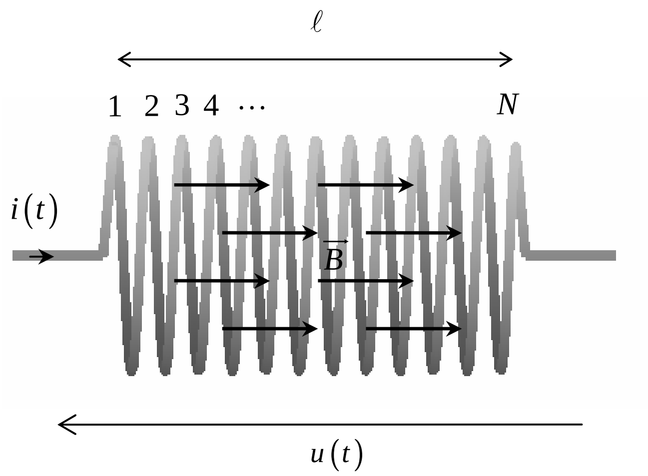


Retenons le cas très simplifié du solénoïde idéal de longueur ℓ constitué de N spires jointives à l'intérieur duquel le champ magnétique peut être considéré comme uniforme et parallèle à l'axe de la bobine. Par application du théorème d'Ampère, on démontre très simplement l'expression du champ magnétique : $B(t) = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t)$

En notant S la surface d'une spire, le flux propre du champ magnétique à travers le solénoïde a pour expression $\Phi(t) = N\,S\,B(t) = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell} i(t)$.

Le coefficient d'auto-induction L de la bobine est défini comme le rapport du flux propre du champ magnétique sur le courant, ce qui donne ici :

$$L = \frac{\Phi(t)}{i(t)} = \mu_0 \frac{N^2 S}{\ell}$$



Remarque : en convention générateur, la force électromotrice aux bornes de la bobine est donnée par la ***loi de Faraday*** régissant les phénomènes d'induction, appliquée ici au cas particulier de l'auto-induction dans un circuit indéformable

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt} = -u(t)$$

1.4. Considérations énergétiques

Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière

En présence d'un champ électromagnétique $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ chaque charge q_i animée d'une vitesse $\vec{v_i}$ est soumise dans la matière à la ***force de Lorentz*** :

$$\vec{f_i} = q_i\left(\vec{E} + \vec{v_i} \wedge \vec{B}\right)$$

Cette force développe une puissance $P_i = \vec{f_i} \cdot \vec{v_i} = q_i \vec{E} \cdot \vec{v_i}$. Seule travaille la contribution électrique de la force de Lorentz, le contribution magnétique, toujours orthogonale au déplacement, ne travaille jamais.

La puissance cédée par le champ dans un volume de matière τ est obtenue en sommant les puissances élémentaires reçues par chaque charge : $P = \sum q_i \vec{v_i} \cdot \vec{E}$. La puissance reçue par la matière par unité de volume est exprimée par la limite « mésoscopique » :

$$\frac{\delta P}{\delta \tau} = \lim_{\tau \to m\acute{e}soscopique} \frac{\sum_{\tau} q_i \vec{v_i} \cdot \vec{E}}{\tau}$$

Nous reconnaissons dans cette expression la densité de courant $\vec{j} = \lim_{\tau \to m\acute{e}soscopique} \frac{\sum_{\tau} q_i \vec{v_i}}{\tau}$

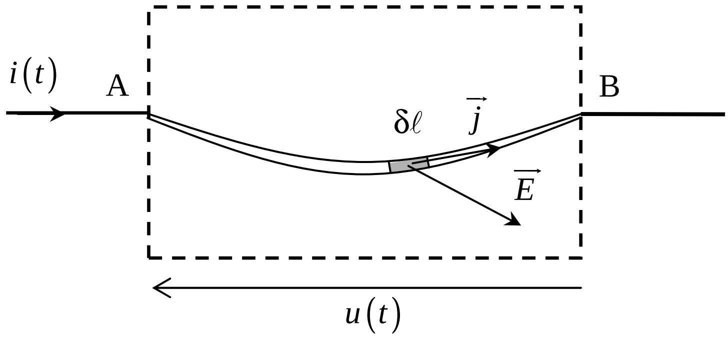
Et nous en déduisons l'expression de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière :

$$\boxed{\frac{\delta P}{\delta \tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}}$$

Puissance reçue par un dipôle électrocinétique

Considérons un dipôle AB dans lequel circule un courant $i(t)$ de A vers B. Nous ne savons rien de ce dipôle : le courant $i(t)$ se propage de A vers B en suivant des lignes de courant quelconques dont la seule caractéristique connue est qu'elles partent du point A et qu'elles aboutissent au point B.

Nous allons exprimer la puissance reçue dans le dipôle par un tube de courant élémentaire dans lequel circule le courant δi. Une cellule élémentaire de longueur $\delta\ell$ et de section δS reçoit une puissance $\delta^2 P = \left(\frac{\delta P}{\delta \tau}\right) \delta S \, \delta\ell$.



En notant $E_{\parallel}$ la composante du champ électrique selon la ligne de courant, nous avons $\frac{\delta P}{\delta \tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = j \, E_{\parallel}$ et, par conséquent, $\delta^2 P = j \, E_{\parallel} \, \delta S \, \delta\ell = E_{\parallel} \, \delta\ell \, \delta i$. L'intégrale de A à B de $E_{\parallel} \, \delta\ell$ correspond à la circulation du champ électrique entre A et B égale, dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, à $u(t) = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}}$.

Nous en déduisons l'expression de la puissance reçue par le tube de courant élémentaire, $\delta P = u(t)\,\delta i$, puis, par intégration sur l'ensemble des tubes de courants élémentaires :

$$\boxed{P(t) = u(t)\; i(t)}$$

Dans l'ARQS, la puissance instantanée reçue par un dipôle est égale au produit de la tension aux bornes du dipôle par l'intensité comptée algébriquement dans la convention récepteur. Ce résultat est démontré dans le cas le plus général, indépendamment de la nature du dipôle, qu'il soit linéaire ou non, qu'il soit actif ou passif, qu'il soit réactif ou qu'il ne le soit pas.

Loi d'ohm locale et intégrale

Loi d'Ohm locale

Dans le cadre de l'ARQS et en l'absence de phénomènes d'induction, de nombreux matériaux obéissent à une loi phénoménologique particulièrement simple dite ***loi d'Ohm locale*** : la densité de courant, en tout point et en tout instant, y est proportionnelle au champ électrique.

$$\vec{j}\left(\vec{r},t\right) = \gamma \vec{E}\left(\vec{r},t\right)$$

Le coefficient de proportionnalité γ s'appelle la ***conductivité électrique*** du milieu.

Les métaux et les alliages métalliques sont de bons conducteurs obéissant à la loi d'ohm. Les électrons de conduction sont les porteurs de charges mobiles et les conductivités électriques sont, pour ces matériaux, des fonctions décroissantes de la température.

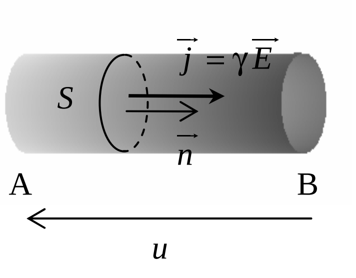
D'autres matériaux comme le germanium et le silicium sont aussi des conducteurs ohmiques. La conduction électrique est due dans ce cas à des électrons qui sont activés par agitation thermique. Pour ces matériaux, que l'on qualifie de semi-conducteurs, la conductivité électrique est une fonction croissante de la température.

Les électrolytes, solutions contenant des ions, sont aussi des conducteurs ohmiques. La conduction électrique résulte de migrations croisées des cations dans la direction du champ électrique et des anions dans la direction opposée. La conductivité est fonction croissante des concentrations des différents solutés.

Loi d'Ohm intégrale

Considérons le cas particulier d'une barre de conduction cylindrique de section S et de longueur ℓ parcourue par un courant uniforme en volume. L'intensité électrique *i*, égale au flux de la densité de courant $\vec{j}$, a pour valeur $j\,S$ tandis que la tension *u* aux bornes du dipôle, égale à la circulation du champ électrique, a pour valeur $E\,\ell$. La proportionnalité locale entre j et E se traduit par une proportionnalité entre les grandeurs macroscopiques *i* et *u*.

Cette relation s'écrit : $i = j\,S = \gamma E\,S = \gamma \dfrac{S}{\ell}\,u = G\,u$, définissant ainsi la conductance $G = \gamma \dfrac{S}{\ell}$ du conducteur ohmique cylindrique homogène.



$$i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}\;\delta S = j\,S$$

$$u = \int_{\overline{AB}} \vec{E} \cdot \vec{\delta\ell} = E\,\ell$$

Cette relation de proportionnalité entre courant et tension, caractéristique des conducteurs ohmiques dans l'ARQS, est la forme intégrale de la loi d'Ohm. Dans le cas le plus général, la conductance d'un dipôle AB est fonction de la géométrie du conducteur : pour la déterminer il faut connaître par le menu détail les lignes de courants entre A et B.

L'inverse de la conductance s'appelle la résistance. Ainsi, la loi d'Ohm intégrale s'écrit :

$$i(t) = G\,u(t) \quad \text{ou} \quad u(t) = R\,i(t) \quad \text{avec} \quad R = \frac{1}{G}$$

1.5. Les unités électriques. Équations aux dimensions

Définition de l'ampère

Rappelons que, dans le Système international, l'unité électrique fondamentale est l'unité de courant électrique, l'ampère (symbole : A), définie comme le courant qui, passant dans deux conducteurs parallèles infinis distants de 1 mètre, produit une force linéique d'interaction égale à 2×10^{-7} Newton par mètre. Cette définition revient à imposer pour la perméabilité du vide la valeur $\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N\cdot A^{-2}}$

Unités électriques dérivées

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des unités électriques dérivées, avec les formules de définition, les symboles internationaux et les équations aux dimensions dans la base fondamentale $[\mathrm{L}]$ (*longueur*), $[\mathrm{T}]$ (*temps*), $[\mathrm{M}]$ (*masse*), $[\mathrm{I}]$ (*intensité*).

Grandeur électrique	*Symboles usuels*	*Formule mnémotechnique*	*Équation aux dimensions*	*Unité S.I.*	*Symbole*
Courant	I, i	Grandeur fondamentale	$[\mathrm{I}]$	ampère	A
Densité de courant	J, j	$i = j\,S$	$[\mathrm{I}][\mathrm{L}]^{-2}$	ampère par mètre carré	$\mathrm{A\cdot m^{-2}}$
Densité de courant de surface	j_S	$i = j_S\,\ell$	$[\mathrm{I}][\mathrm{L}]^{-1}$	ampère par mètre	$\mathrm{A\cdot m^{-1}}$
Champ magnétique	B	$F = B\,i\,\ell$	$[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{M}][\mathrm{I}]^{-1}$	tesla	T
Flux du champ magnétique	Φ	$\Phi = B\,S$	$[\mathrm{L}]^{2}[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{M}][\mathrm{I}]^{-1}$	weber	Wb
Perméabilité	μ	$B\,\ell = \mu\,i$ (*théorème d'Ampère*)	$[\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{M}][\mathrm{I}]^{-2}$	newton par ampère carré	$\mathrm{N\cdot A^{-2}}$
Charge	Q, q	$q = i\,t$	$[\mathrm{I}][\mathrm{T}]$	coulomb	C
Densité volumique de charge	ρ	$\rho = \dfrac{q}{\tau}$	$[\mathrm{I}][\mathrm{T}][\mathrm{L}]^{-3}$	coulomb par mètre cube	$\mathrm{C\cdot m^{-3}}$
Densité surfacique de charge	σ	$\sigma = \dfrac{q}{S}$	$[\mathrm{I}][\mathrm{T}][\mathrm{L}]^{-2}$	coulomb par mètre carré	$\mathrm{C\cdot m^{-2}}$
Densité linéique de charge	λ	$\lambda = \dfrac{q}{\ell}$	$[\mathrm{I}][\mathrm{T}][\mathrm{L}]^{-1}$	coulomb par mètre	$\mathrm{C\cdot m^{-1}}$
Champ électrique	E	$F = q\,E$	$[\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-3}[\mathrm{M}][\mathrm{I}]^{-1}$	volt par mètre	$\mathrm{V\cdot m^{-1}}$

Permittivité	ε	$E\,S = \dfrac{q}{\varepsilon}$ (*théorème de Gauss*)	$[\mathrm{L}]^{-3}[\mathrm{T}]^{4}[\mathrm{M}]^{-1}[\mathrm{I}]^{2}$	farad par mètre	$\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$
Potentiel, tension, force électromotrice	V, u, U, e	$u = \dfrac{P}{i}$	$[\mathrm{L}]^{2}[\mathrm{T}]^{-3}[\mathrm{M}][\mathrm{I}]^{-1}$	volt	V
Capacité	C	$q = C\,u$	$[\mathrm{L}]^{-2}[\mathrm{T}]^{4}[\mathrm{M}]^{-1}[\mathrm{I}]^{2}$	farad	F
Inductance	L	$\Phi = L\,i$	$[\mathrm{L}]^{2}[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{M}][\mathrm{I}]^{-2}$	henry	H
Résistance	R, r	$u = R\,i$	$[\mathrm{L}]^{2}[\mathrm{T}]^{-3}[\mathrm{M}][\mathrm{I}]^{-2}$	ohm	Ω
Conductance	G, g	$i = G\,u$	$[\mathrm{L}]^{-2}[\mathrm{T}]^{3}[\mathrm{M}]^{-1}[\mathrm{I}]^{2}$	siemens	S
Conductivité	γ	$j = \gamma E$	$[\mathrm{L}]^{-3}[\mathrm{T}]^{3}[\mathrm{M}]^{-1}[\mathrm{I}]^{2}$	siemens par mètre	$\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$