ÉLECTROCINÉTIQUE

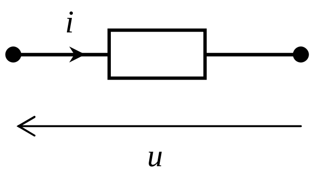
Chapitre 2

Circuits linéaires filiformes en régime permanent

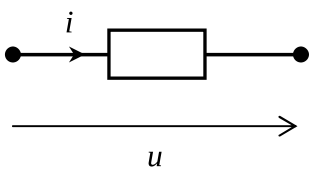
Ce chapitre ne constitue pas un cours exhaustif sur les sujets abordés, il s'agit simplement d'un rappel des résultats les plus importants du cours d'électrocinétique de première année. Une bonne connaissance des lois élémentaires de l'électricité et des techniques mathématiques adéquates est souhaitable pour aborder sereinement le cours de deuxième année. Si des révisions sont nécessaires, cela veut dire qu'il est ***indispensable*** *de commencer par là.*

2.1. Dipôles électrocinétiques

Une convention algébrique étant choisie pour le courant, la tension doit également être définie en valeur algébrique.



Convention récepteur



Convention générateur

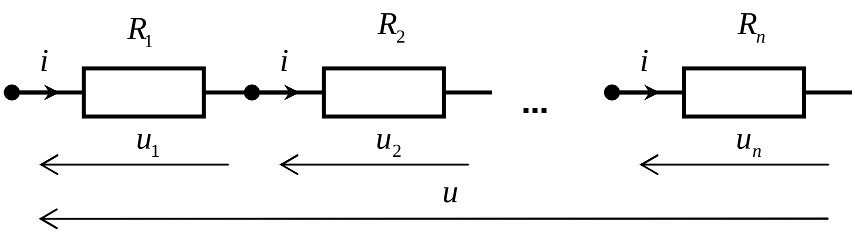
En ***convention récepteur***, les courants sont comptés positivement quand ils descendent les potentiels. Avec cette convention, lorsque le courant et la tension sont tous deux positifs, le dipôle *reçoit* une puissance $p = u\,i$ positive.

En ***convention générateur***, au contraire, les courants sont comptés positivement quand ils remontent les potentiels. Avec cette convention, lorsque le courant et la tension sont tous deux positifs, le dipôle fournit une puissance positive.

2.2. Associations de résistances

Association de résistances en série, division de tension

Considérons un ensemble de résistances $R_1, R_2, \cdots, R_n$ montées en série, c'est-à-dire connectées bout à bout sans aucune autre connexion supplémentaire sur la chaîne de telle sorte que tous ces dipôles soient parcourus par le même courant i.



La valeur de la résistance équivalente est alors égale à la somme des valeurs des résistances :

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

La tension u_1 aux bornes de la résistance R_1 peut s'exprimer comme une fraction de la tension totale u aux bornes de la ligne de résistances. Avec $u_1 = R_1 i$ et $u = \left(R_1 + R_2 + \cdots + R_n\right) i$, nous en déduisons :

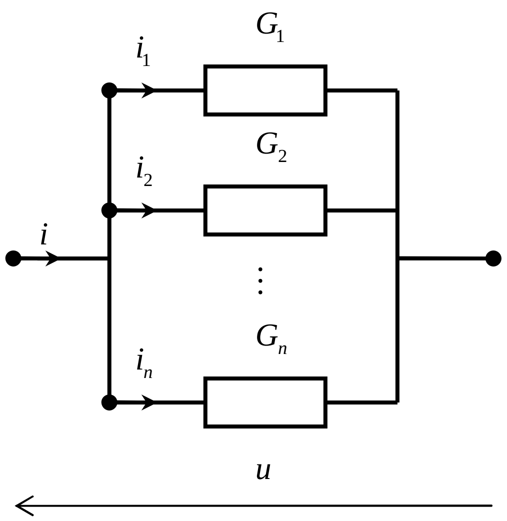
$$u_1 = u \, \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \cdots + R_n}$$

C'est le principe de la ***division de tension***. Cette règle peut s'appliquer bien sûr à chaque résistance de la chaîne de résistance. Une telle écriture nous permet d'éviter d'introduire le courant i.

Association de résistances en parallèle, division de courant

Rappelons que la conductance G d'un dipôle ohmique linéaire est définie comme l'inverse le la valeur de sa résistance R.

Considérons un ensemble de résistances de conductances $G_1, G_2, \cdots, G_n$, montées en parallèle, c'est-à-dire connectées aux deux mêmes nœuds du réseau conformément au schéma ci-dessous, de telle sorte que tous ces dipôles soient soumis à la même tension u.



La valeur de la conductance équivalente d'un ensemble de résistances connectées en parallèle est égale à la somme de la valeur des conductances.

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

La courant i_1 traversant la résistance R_1 peut s'exprimer comme une fraction du courant total i traversant l'ensemble des résistances. Avec $i_1 = G_1 u$ et $i = \left(G_1 + G_2 + \cdots + G_n\right) u$, nous en déduisons :

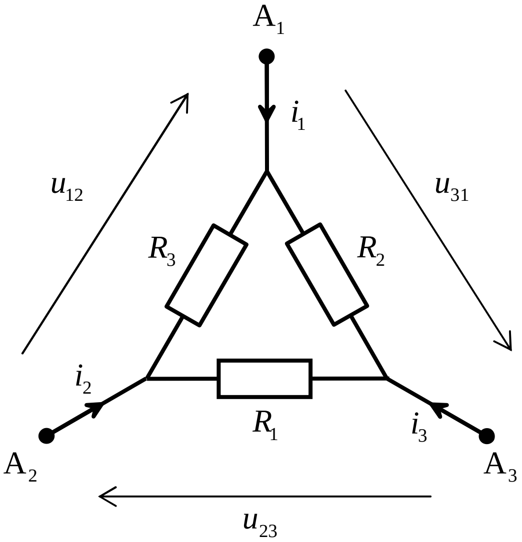
$$i_1 = i \, \frac{G_1}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n} = i \, \frac{\dfrac{1}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \cdots + \dfrac{1}{R_n}}$$

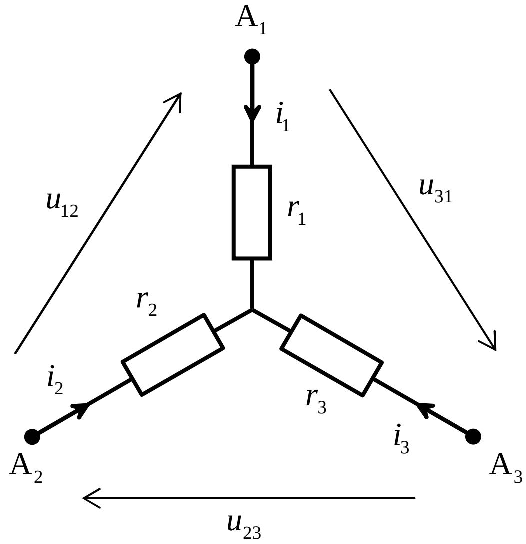
C'est le principe de la ***division de courant***. Cette règle peut s'appliquer bien sûr à chacune des résistances montées en parallèle. Une telle écriture nous permet d'éviter d'introduire la tension u.

Transformation triangle $\rightarrow$ étoile

Considérons trois résistances R_1, R_2 et R_3 formant une maille triangulaire $A_1A_2A_3$. Une connexion en étoile de trois résistances r_1, r_2 et r_3 convergeant en un seul nœud est équivalente pourvu que soient satisfaites simultanément les trois relations :

$$r_1 = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}, \quad r_2 = \frac{R_3R_1}{R_1+R_2+R_3} \quad \text{et} \quad r_3 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}$$

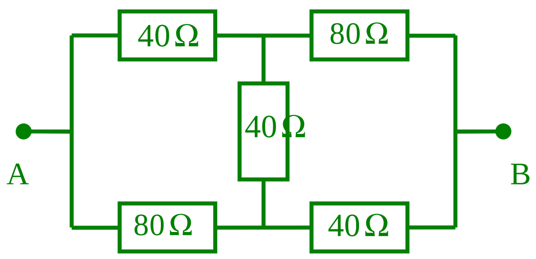


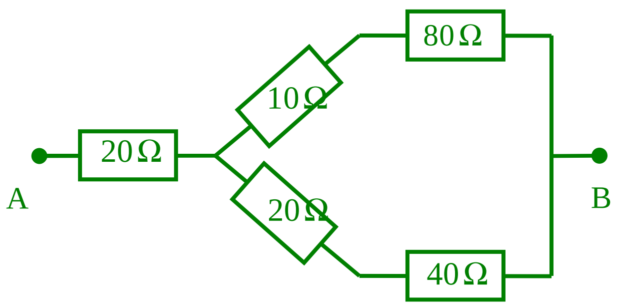


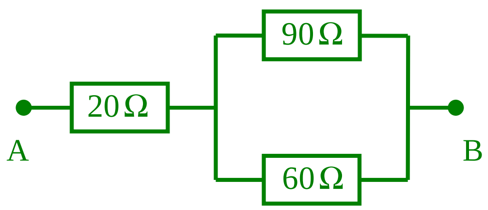
Cette équivalence signifie que si l'on remplace dans un réseau électrique les résistances R_1, R_2 et R_3 connectées en triangle par les résistances r_1, r_2 et r_3 connectées en étoile, ni les tensions u_{12}, u_{23}, u_{31}, ni les courants i_1, i_2, i_3 ne seront modifiés.

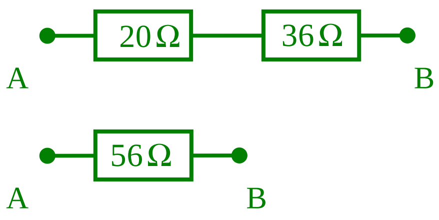
Cette propriété permet de simplifier un réseau en diminuant le nombre de mailles d'une unité.

Exemple : détermination de la résistance équivalente au dipôle ponté AB, par transformation triangle étoile, puis associations de résistances en parallèle et en série.



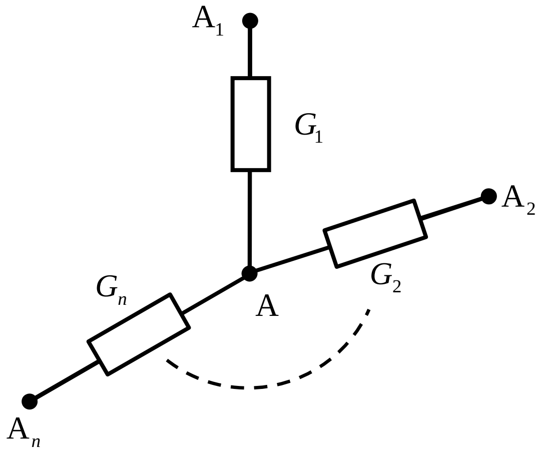






Théorème de Millman

Considérons un ensemble de dipôles ohmiques linéaires A_1A, A_2A, $\cdots$, A_nA convergeant en un même nœud A d'un réseau électrique. Le potentiel au nœud A est le barycentre des potentiels aux points A_k affectés de poids ayant pour valeur les conductances G_k de ces dipôles.



$$V(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k V(\mathrm{A}_k)}{\sum_{k=1}^{n} G_k}$$

Remarque : le théorème de Millman est une façon d'exprimer la loi des nœuds en terme de potentiels.

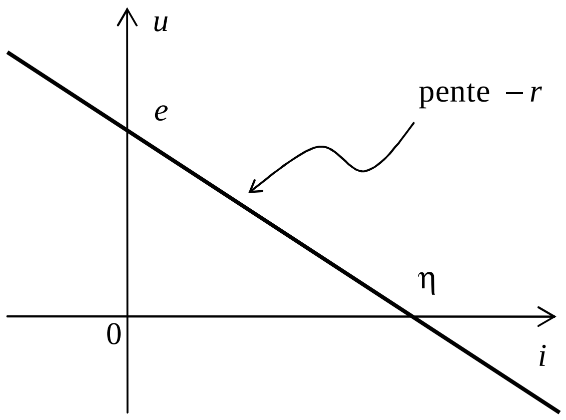
$$\sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} G_k u_{\mathrm{A}_k\mathrm{A}} = \sum_{k=1}^{n} G_k \left[V(\mathrm{A}_k) - V(\mathrm{A}) \right] = 0$$

D'où l'expression de $V(\mathrm{A})$.

2.3. Générateur linéaire, représentation de Thévenin, représentation de Norton

Équation caractéristique

Par définition, un générateur linéaire est un dipôle actif idéal dont la caractéristique courant-tension serait une droite parfaite. Ce modèle de générateur nous intéresse d'autant plus que les accumulateurs électrochimiques ont un comportement qui s'en rapproche assez, du moins tant qu'on ne leur demande pas de débiter des courants trop forts.



$$u = e - r\,i$$

$$i = \eta - g\,u$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} g = \dfrac{1}{r} \\ \eta = \dfrac{e}{r} \end{cases}$$

En convention générateur, la caractéristique peut être définie par ses intersections avec les axes. L'intersection avec l'axe des tensions représente la tension en circuit ouvert, ou force électromotrice *e* du générateur linéaire.

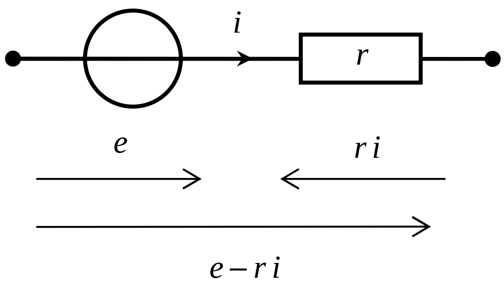
L'intersection avec l'axe des courants représente le courant de court-circuit, ou courant électromoteur η du générateur linéaire.

Lorsque la tension est portée en ordonnée et le courant en abscisse, et toujours en convention générateur, la pente de la caractéristique est négative. On la notera $-r$, définissant ainsi la résistance interne *r* du générateur linéaire. Fort logiquement on appelle conductance interne *g* l'inverse de la résistance interne *r*.

L'équation de la caractéristique s'écrit donc aussi bien $u = e - r\,i$ que $i = \eta - g\,u$.

Représentation de Thévenin

La forme $u = e - r\,i$ de l'équation caractéristique exprime aussi bien la tension aux bornes d'un dipôle constitué par la mise en série d'un ***générateur idéal de tension*** (générateur linéaire de tension de résistance interne idéalement nulle) de force électromotrice *e* et d'une résistance *r*. Ce montage correspond au ***schéma équivalent de Thévenin*** du générateur linéaire.

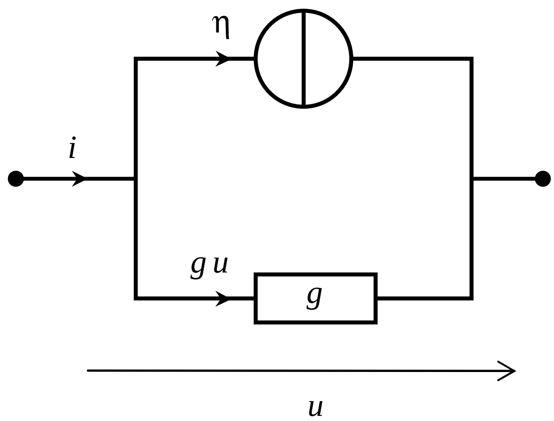


Cette représentation du générateur linéaire est particulièrement intéressante si l'on considère le montage en série de plusieurs générateurs linéaires : plusieurs générateurs linéaires associés en série sont équivalents à un seul générateur linéaire dont la force électromotrice est égale à la somme ***algébrique*** des f.e.m. des générateurs et dont la résistance interne est égale à la somme des résistances internes des générateurs.

Attention ! Si la convention algébrique de tension correspond au sens opposé du sens électromoteur du générateur linéaire, alors il faut considérer que sa force électromotrice est négative.

Représentation de Norton

La forme $i = \eta - g\,u$ de l'équation caractéristique exprime aussi bien le courant traversant un dipôle constitué par la mise en parallèle d'un ***générateur idéal de courant*** (générateur linéaire de courant de conductance interne idéalement nulle) de courant électromoteur η et d'une conductance *g*. Ce montage correspond au ***schéma équivalent de Norton*** du générateur linéaire.



Cette représentation du générateur linéaire est particulièrement intéressante si l'on considère le montage en parallèle de plusieurs générateurs linéaires : plusieurs générateurs linéaires associés en parallèle sont équivalents à un seul générateur linéaire dont le courant électromoteur est égal à la somme ***algébrique*** des c.e.m. des générateurs et dont la conductance interne est égale à la somme des conductances internes des générateurs.

Attention ! Si la convention algébrique de courant correspond au sens opposé du sens électromoteur du générateur linéaire, alors il faut considérer que son courant électromoteur est négatif.

Remarque : un générateur idéal de tension n'admet pas de schéma équivalent de Norton, pas plus qu'un générateur idéal de courant n'admet de schéma équivalent de Thévenin. Ces cas particuliers mis à part, il faut bien comprendre qu'il n'y a pas des générateurs de Thévenin d'une part et des générateurs de Norton d'autre part : il s'agit de deux représentations équivalentes d'un seul modèle de composant, le générateur linéaire. Selon l'opportunité, on choisira plutôt l'une ou l'autre représentation.

2.4. Symétries, antisymétrie, superposition

Principe de Curie

Un des principes les plus généraux de la physique, connu sous l'appellation de ***« principe de Curie »*** affirme qu'une symétrie des causes implique une symétrie au moins égale des effets.

Nous appliquerons souvent ce principe dans le cadre de l'électromagnétisme. Dans le cadre de l'ARQS nous pouvons énoncer la règle suivante : si un réseau électrique présente une symétrie[1], alors les composants symétriques sont parcourus par des courants identiques et sont soumis aux mêmes tensions. Les nœuds symétriques sont à des potentiels électriques identiques.

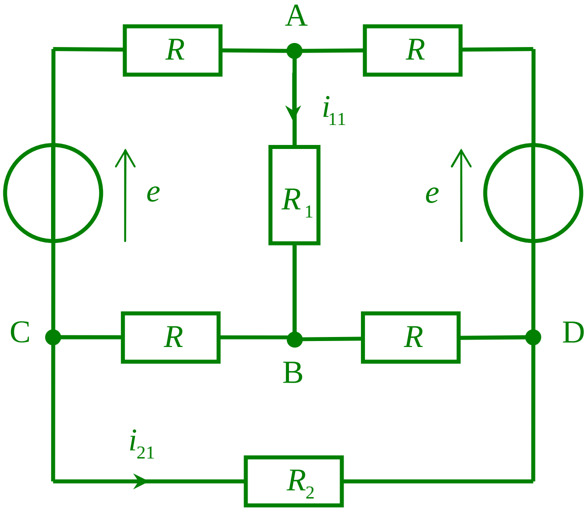
En conséquence, on ne change pas la situation électrocinétique d'un réseau en court-circuitant des nœuds symétriques, c'est-à-dire en les reliant par un fil non résistif pour qu'ils ne forment plus qu'un seul nœud. Réciproquement, on ne change pas la situation électrocinétique d'un réseau en défaisant une connexion située sur un plan de symétrie.

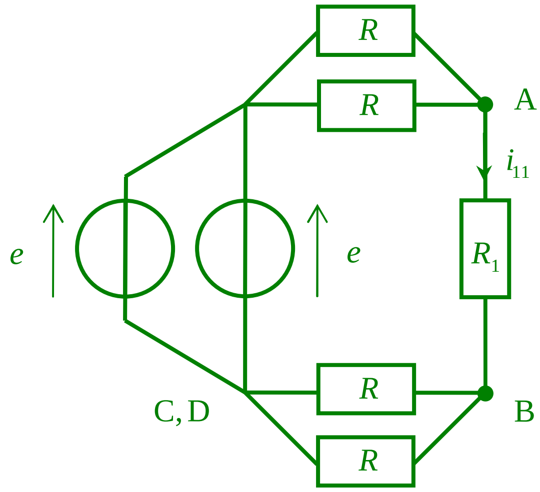
Exemple : considérons le réseau suivant (*réseau n°1*) pour lequel la branche AB est un axe de symétrie. Si l'on souhaite déterminer les courants i_{11} et i_{21} dans les résistances R_1 et R_2, il est inutile d'écrire les lois de Kirchhoff pour un réseau à trois mailles.

Les deux méthodes suivantes, aussi simples l'une que l'autre, donnent immédiatement le résultat.

La première méthode consiste à relier tous les nœuds symétriques, ce qui revient à replier le circuit sur lui-même selon l'axe de symétrie. On obtient alors un schéma sur lequel les résistances R sont en parallèle et équivalent à une résistance $R/2$ tandis que les deux générateurs idéaux en parallèle sont équivalents à un seul générateur de même force électromotrice *e*. Les nœuds C et D étant au même potentiel, il ne passe aucun courant dans la résistance R_3.

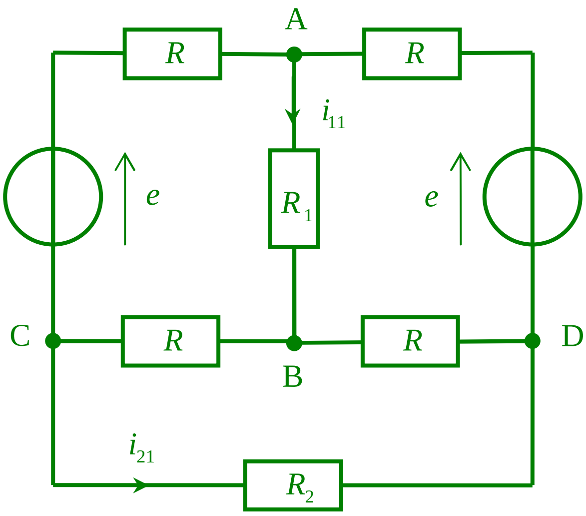
[1] Nous parlons ici de symétrie du point de vue de la topologie des connexions électriques, et non pas du point de vue de la disposition géométrique des composants

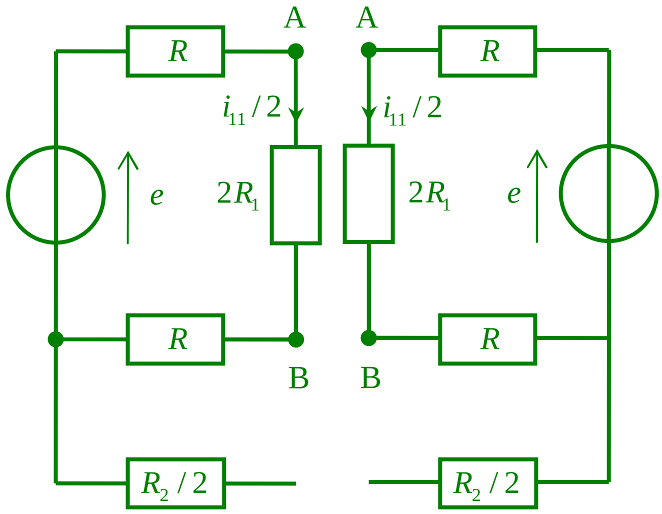




On en déduit, sur le dernier schéma : $i_{11} = \dfrac{e}{R + R_1}$ et $i_{21} = 0$

La deuxième méthode consiste au contraire à couper le circuit en deux selon son axe de symétrie.





On en déduit immédiatement : $\dfrac{i_{11}}{2} = \dfrac{e}{2R + 2R_1}$ et $i_{21} = 0$

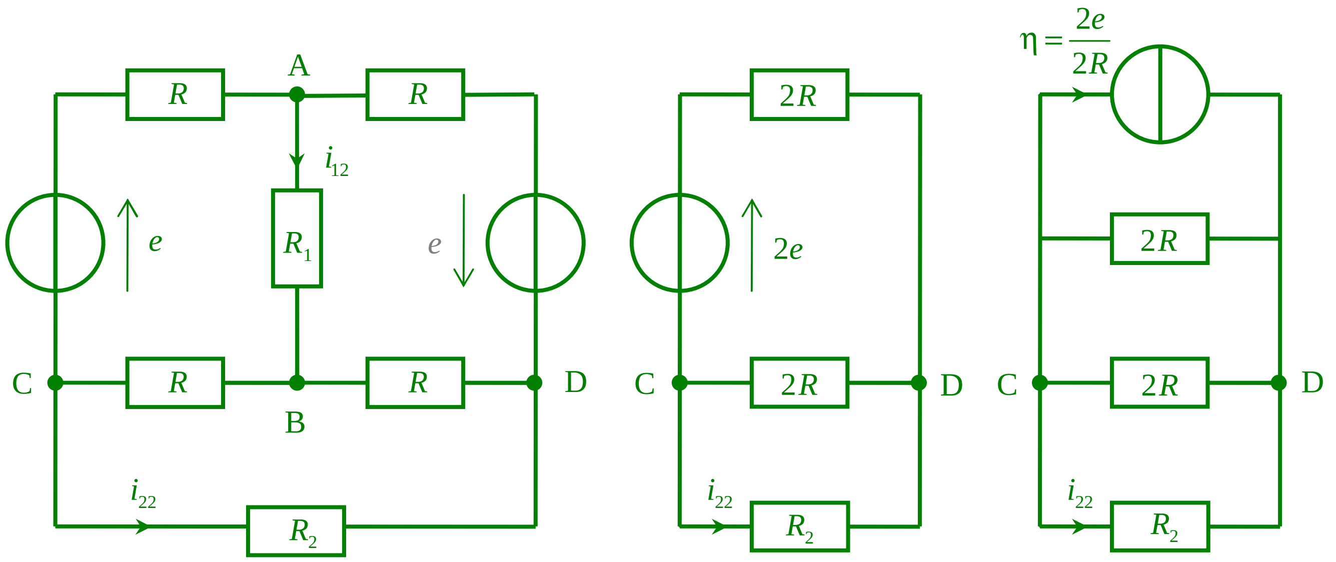
Antisymétrie dans un réseau linéaire

Dans un réseau linéaire, les courants et les tensions sont des fonctions linéaires des sources électromotrices. Cela signifie que si l'on change les signes de toutes les sources électromotrices (forces électromotrices et courants électromoteurs), cela a pour effet de changer les signes de tous les courants et de toutes les tensions.

Nous dirons qu'un réseau présente un plan d'antisymétrie lorsque ce plan est un plan de symétrie des connexions mais que les éléments électromoteurs associés dans cette symétrie ont des signes opposés.

Nous en déduisons immédiatement que les courants dans des branches antisymétriques sont opposés. Nous en déduisons également que le courant dans une branche appartenant au plan d'antisymétrie est égal à son opposé et, par conséquent, nul.

Exemple : considérons le réseau suivant (*réseau n°2*) pour lequel la branche AB est un axe d'antisymétrie. On souhaite déterminer les courants i_{12} et i_{22} dans les résistances R_1 et R_2.



La branche AB, située dans le plan d'antisymétrie, n'est parcourue par aucun courant. On peut donc supprimer la résistance R_1 sans modifier la situation électrique du réseau. Les deux mailles supérieures n'en font plus qu'une et l'on peut y associer deux générateurs linéaires en série.

Il reste alors à choisir plutôt le représentation de Norton du générateur résultant et nous obtenons le dernier schéma, sur lequel le courant i_{22} se calcule par division de courant.

On en déduit : $$i_{12} = 0 \quad \text{et} \quad i_{22} = -\frac{e}{R}\frac{\dfrac{1}{R_2}}{\dfrac{1}{2R}+\dfrac{1}{2R}+\dfrac{1}{R_2}} = -\frac{e}{R+R_2}$$

Théorème de superposition pour les réseaux linéaires

Dans le cas d'un réseau linéaire, les équations de Kirchhoff sont des équations linéaires. Cela implique que les courants et les tensions sont des fonctions linéaires des forces électromotrices et des courants électromoteurs. Nous en déduisons l'expression la plus simple du *théorème de superposition* :

Dans un réseau linéaire comprenant plusieurs sources indépendantes[2], chaque courant, chaque tension, est la somme algébrique de contributions indépendantes dues à chacune des sources, chacune de ces contributions se calculant en annulant toutes les sources sauf une.

Attention ! Annuler un générateur idéal de tension revient à le remplacer par un fil tandis qu'annuler un générateur idéal de courant revient à supprimer la branche dans laquelle il se trouve.

L'intérêt de ce théorème est de transformer un gros problème en une somme de plus petits problèmes bien plus faciles à résoudre : cela s'appelle *sérier les problèmes*.

Encore faut-il que les problèmes à un seul générateur soient plus simples à résoudre que le problème global et ce ne sera pas le cas lorsque des symétries sont brisées par partition du problème. Pour cette raison, il vaut mieux exprimer le théorème de superposition sous cette autre forme :

---

[2] Il ne faut pas y inclure les sources commandées dont il est question à la section suivante

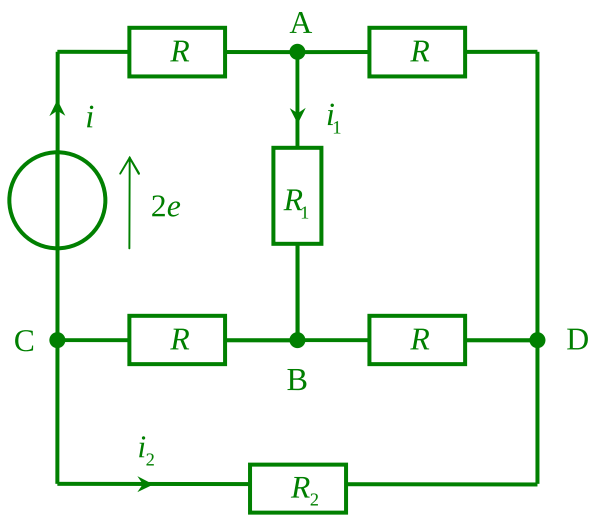
Dans un réseau linéaire, chaque courant, chaque tension, peut être obtenu par superposition de solutions partielles correspondant à des valeurs partielles des sources électromotrices à la seule condition que la somme algébrique de ces valeurs partielles corresponde aux valeurs des sources électromotrices du problème initial.

Remarque : à nous de choisir des décompositions qui définissent des problèmes partiels effectivement plus simples à résoudre, ce qui correspond le plus souvent à veiller préserver les symétries.

Exemple : considérons le réseau suivant (*réseau n°3*), ne présentant pas de symétrie, pour lequel on souhaite déterminer les courants i_1 et i_2 dans les résistances R_1 et R_2.

Nous résolvons immédiatement ce problème, par application du théorème de superposition, en remarquant que ce réseau n°3 est la superposition du réseau n°1 (symétrique) et du réseau n°2 (antisymétrique) : $\{2e,0\}=\{e,e\}+\{e,-e\}$

$$i_1 = i_{11} + i_{12} = i_{11} = \frac{e}{R+R_1} \quad \text{et} \quad i_2 = i_{21} + i_{22} = i_{22} = -\frac{e}{R+R_2}$$



Remarque : la résolution directe des équations de Kirchhoff est rarement une bonne méthode. Cherchons toutefois les solutions en utilisant un logiciel de calcul formel (ici *MAPLE*) et en privilégiant pour inconnues les grandeurs recherchées i_1 et i_2.

```
> restart:
  maille1:=2*e-R*i-R1*i1-R*(i+i2)=0:
  maille2:=-R*(i1-i)-R1*i1-R*(i1-i-i2)=0:
  maille3:=R*(i+i2)-R*(i1-i-i2)+R2*i2=0:
  lois_de_kirchhoff:={maille1,maille2,maille3}:
  courants:={i,i1,i2}:
  solve(lois_de_kirchhoff, courants);
```

$$\left\{ i2 = -\frac{e}{R+R2},\ i1 = \frac{e}{R+R1},\ i = \frac{e\,(3\,R^2 + 2\,R\,R2 + 2\,R1\,R + R1\,R2)}{2\,R\,(R+R1)\,(R+R2)} \right\}$$

L'expression du courant *i* débité par le générateur nous montre bien à quel calcul algébrique pénible nous avons échappé en faisant apparaître des symétries.

2.5. Sources commandées

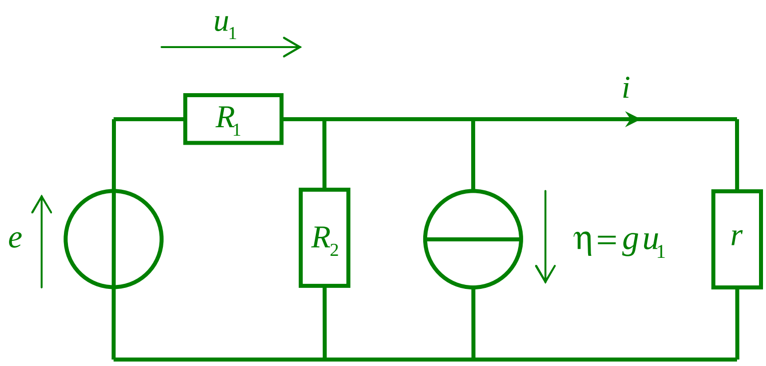
De nombreux composants électroniques actifs peuvent être représentés avec une bonne approximation par un modèle linéaire. Nous définissons alors un *schéma équivalent* dans lequel peuvent intervenir des *sources commandées*.

Ces sources commandées sont des générateurs idéaux de tension (ou de courant) dont la force électromotrice (ou le courant électromoteur) est déterminée par la valeur d'une grandeur électrique de commande qui peut être une tension u_{AB} entre deux points quelconques A et B du réseau (on parle alors de source commandée en tension) ou un courant i_{AB} dans un branche quelconque AB du réseau (on parle alors de source commandée en courant).

Si la f.e.m. ou le c.e.m. de la source commandée est proportionnelle à la consigne de commande, il s'agit de sources commandées linéaires, les seules que l'on envisagera ici. Il existe donc quatre type de sources commandées linéaires :

- Les sources de tension commandées en tension : $e = k\,u_{AB}$, ou k est un coefficient constant sans dimension.
- Les sources de tension commandées en courant : $e = r\,i_{AB}$, ou r est un coefficient constant homogène à une résistance.
- Les sources de courant commandées en courant : $\eta = k\,i_{AB}$, ou k est un coefficient constant sans dimension.
- Les sources de courant commandées en tension : $\eta = g\,u_{AB}$, ou g est un coefficient constant homogène à une conductance.

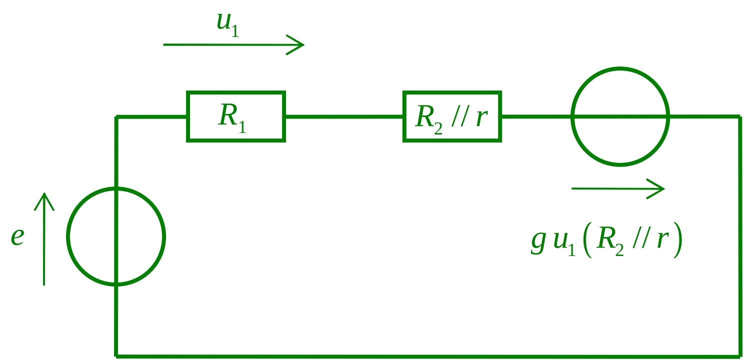
Exemple : déterminer le courant *i* dans la résistance *r*.



Une première remarque s'impose : il est hors de question d'appliquer le théorème de superposition, nous n'avons ici qu'une seule source indépendante.

Deuxième remarque : il faut éviter les transformations de schéma qui font disparaître la commande u_1. Il serait tentant ici de traiter les deux générateurs linéaires comme étant en parallèle et d'en déterminer la représentation de Norton équivalente, mais dans cette transformation la tension de commande u_1 disparaît : ce n'est donc pas un bon choix.

Nous allons au contraire transformer le générateur commandé de courant en générateur commandé de tension par une transformation Norton $\rightarrow$ Thévenin. Ceci nous permettra de déterminer la tension de commande u_1. Il faudra ensuite revenir au schéma initial pour déterminer le courant *i*.



Nous en déduisons, par division de tension, une relation linéaire permettant de déterminer la valeur de la tension de commande u_1 :

$$u_1 = -\left[e + g\,u_1\left(R_2 // r\right)\right]\frac{R_1}{R_1 + R_2 // r} \quad \text{soit} \quad u_1 = -\frac{e}{1 + \left(\dfrac{1}{R_1} + g\right)\left(R_2 // r\right)}$$

Dès lors, connaissant la tension $e + u_1$ aux bornes de la résistance r, nous en déduisons le courant i :

$$i = \frac{e + u_1}{r} = e\,\frac{\left(1 + gR_1\right)R_2}{R_1R_2 + R_1r + \left(1 + gR_1\right)R_2r}$$