ÉLECTROCINÉTIQUE

Chapitre 3

Régimes transitoires quasi stationnaires

Ici encore il ne s'agit pas d'un cours exhaustif, mais d'un ***chapitre de révisions*** *du cours de première année. En particulier, il s'agit de maîtriser définitivement et parfaitement les techniques de résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Nous étudierons le comportement de circuits électriques constitués de résistances, de condensateurs et de bobines considérés comme idéalement linéaires lorsque, à partir de conditions initiales qui correspondent à un régime permanent, de nouvelles conditions sont imposées qui provoquent une évolution suffisamment lente pour être traitée dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires.*

3.1. Équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier et du second ordre

Propriétés générales

La forme la plus générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre inférieur ou égal à deux, à coefficients constants, est la suivante :

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+c\,y(t)=f(t)$$

$y(t)$ est la fonction inconnue et t est la variable. a, b et c sont des constantes réelles. Si $a \neq 0$, l'équation est du second ordre tandis que si $a=0$, l'équation est du premier ordre.

$f(t)$ s'appelle traditionnellement « le second membre ». Il s'agira concrètement toujours d'une fonction très simple. Il s'agira souvent d'une constante et plus rarement d'une fonction polynomiale, d'une fonction exponentielle ou d'une fonction sinus.

L'équation différentielle $a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+c\,y(t)=0$ s'appelle « équation sans second membre » associée à l'équation différentielle initiale.

Première règle

La solution générale $y_{\text{géné}}(t)$ d'une équation différentielle linéaire avec second membre est égale à la somme de la solution générale de l'équation sans second membre $y_{\text{ssm}}(t)$ et d'une solution particulière de l'équation complète $y_{\text{part}}(t)$:

$$\boldsymbol{y_{\text{géné}}(t)=y_{\text{part}}(t)+y_{\text{ssm}}(t)}$$

Nous ne pouvons envisager de résoudre une telle équation si l'on est incapable d'en trouver une solution particulière.

Fort heureusement pour beaucoup de cas qui nous intéressent, nous identifierons une solution particulière assez facilement en la recherchant d'une forme ressemblant au second membre $f(t)$.

En particulier, si le second membre est une constante $f(t)=K$, l'équation différentielle admet une solution particulière constante pour $c \neq 0$: $y_{\text{part}}(t)=\dfrac{K}{c}$

Remarque : la solution particulière que l'on identifie le plus facilement a toujours une signification physique précise (par exemple, il s'agira souvent du régime permanent qui s'établit au bout d'un temps infini)

Deuxième règle

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire sans second membre a une structure d'espace vectoriel dont la dimension est égale à l'ordre de l'équation différentielle.

En particulier, pour une équation différentielle linéaire du premier ordre, toutes les solutions sont proportionnelles : il suffira d'identifier une solution de l'équation sans second membre pour les connaître toutes : $y_{\text{ssm}}(t)=K_1\, y_{\text{ssm}1}(t)$

Dans le cas d'une équation différentielle linéaire du second ordre, il faudra identifier deux solutions indépendantes (non proportionnelles) pour construire la solution la plus générale comme combinaison linéaire de ces deux solutions : $y_{\text{ssm}}(t)=K_1\, y_{\text{ssm}1}(t)+K_2\, y_{\text{ssm}2}(t)$

Troisième règle

Ce n'est qu'après avoir identifié la solution la plus générale de l'équation avec second membre $y_{\text{géné}}(t)=y_{\text{part}}(t)+K_1\, y_{\text{ssm}1}(t)+K_2\, y_{\text{ssm}2}(t)$ que l'on peut tenir compte des conditions particulières imposées à la fonction $y(t)$. Ces conditions particulières permettent l'identification des constantes K_1 et K_2.

Remarque : les conditions particulières ont toujours une signification physique précise.

Équations du premier ordre

L'équation suivante est la forme la plus générale d'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants :

$$\frac{dy(t)}{dt}+k\, y(t)=f(t)$$

La constante k est homogène à l'inverse d'un temps. Nous poserons $\tau=\dfrac{1}{k}$ « constante de temps » de l'équation différentielle et, le plus souvent pour les applications en électricité, cette constante sera positive.

Équation sans second membre

Nous recherchons une solution de l'équation sans second membre sous la forme d'une fonction exponentielle e^{rt}. L'équation s'écrit alors : $(r+k)e^{rt}=0$.

Cette équation est satisfaite pour la valeur particulière $r = -k$. Nous avons donc identifié une solution de l'équation sans second membre.

Par conséquent, la solution générale de l'équation sans second membre est : $y_{\text{ssm}}(t) = K\,e^{-\frac{t}{\tau}},\ K \in \mathbb{R}$

Équation complète

Pourvu que l'on ait identifié une solution particulière $y_{\text{part}}(t)$ de l'équation complète (il faudra voir cela au cas par cas), nous avons donc la solution générale de l'équation :

$$y_{\text{géné}}(t) = y_{\text{part}}(t) + K\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il restera alors à tenir compte de la condition particulière imposée à la fonction $y(t)$ pour déterminer la valeur de la constante d'intégration *K*.

Équations du second ordre sans terme du premier ordre

L'équation suivante est la forme la plus générale d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans terme du premier ordre :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\,y(t) = f(t)$$

Équation sans second membre

La constante *c* est homogène à l'inverse du carré d'un temps. Les solutions de l'équation sans second membre sont de nature très différentes selon le signe de cette constante.

● **solutions exponentielles : $c < 0$**

On pose alors $c = -\alpha^2$ et l'équation admet pour solutions $e^{+\alpha t}$ et $e^{-\alpha t}$. La solution générale de l'équation sans second membre est alors $K_1\,e^{+\alpha t} + K_2\,e^{-\alpha t}$

● **solutions harmoniques : $c > 0$**

On pose alors $c = \omega^2$ et l'équation admet pour solutions $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$. La solution générale de l'équation sans second membre est alors $K_1\cos\omega t + K_2\sin\omega t$, que l'on peut encore écrire $K\cos(\omega t + \varphi)$.

Équation complète

Pourvu que l'on ait identifié une solution particulière $y_{\text{part}}(t)$ de l'équation complète, nous avons donc la solution générale de l'équation :

$$y_{\text{géné}}(t) = y_{\text{part}}(t) + K_1\,e^{+\alpha t} + K_2\,e^{-\alpha t} \qquad \text{dans le cas exponentiel}$$
$$y_{\text{géné}}(t) = y_{\text{part}}(t) + K_1\cos\omega t + K_2\sin\omega t \qquad \text{dans le cas harmonique}$$

Il restera alors à tenir compte des conditions particulières imposées à la fonction $y(t)$ pour déterminer les valeurs des constantes d'intégration K_1 et K_2.

Équations du second ordre à coefficients positifs

L'équation suivante est la forme la plus générale d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants positifs, dans l'écriture canonique usuelle :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2\, y(t) = f(t)$$

ω_0 s'appelle *pulsation propre* et le coefficient *m*, qui est un nombre sans dimension, s'appelle *coefficient d'amortissement.*

Équation sans second membre

Nous recherchons deux solutions de l'équation sans second membre sous la forme de fonctions exponentielles e^{rt}. Pour cela *r* doit être solution de l'*équation caractéristique* : $r^2 + 2m\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$. La nature des solutions dépend de ce que cette équation du second degré admet des solutions réelles ou non. Cela dépend du signe du discriminant $\Delta = 4\omega_0^2\left(m^2 - 1\right)$.

● solutions exponentielles : $m > 1$

Dans ce cas, le discriminant de l'équation caractéristique est positif et l'équation du second degré admet deux solutions réelles négatives $r_1 = \left(-m + \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0 = -\frac{1}{\tau_1}$ et $r_2 = \left(-m - \sqrt{m^2 - 1}\right)\omega_0 = -\frac{1}{\tau_2}$.

Nous avons identifié deux solutions exponentielles comme solutions de l'équation différentielle sans second membre. La solution la plus générale est alors une combinaison linéaire quelconque des ces deux exponentielles décroissantes $K_1\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} + K_2\, e^{-\frac{t}{\tau_2}}$

● solutions sinusoïdales exponentiellement amorties : $m < 1$

L'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = \left(-m + j\sqrt{1 - m^2}\right)\omega_0$ et $r_2 = \left(-m - j\sqrt{1 - m^2}\right)\omega_0$. Nous avons donc ainsi identifié la solution générale sur $\mathbb{C}$ qui est une combinaison linéaire à coefficients complexes de $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ est la partie réelle de la solution générale sur $\mathbb{C}$.

En posant $m\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - m^2}$, cette solution générale s'écrit $e^{-\frac{t}{\tau}}\left(K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t\right)$ ou encore $K\, e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\omega t + \varphi\right)$

● solutions d'amortissement critique : $m = 1$

Dans ce cas particulier, l'équation caractéristique admet une seule racine réelle négative : $r = -\omega_0$

$e^{-\omega_0 t}$ est donc solution de l'équation sans second membre. On constate alors que la fonction $t\, e^{-\omega_0 t}$ est aussi solution. La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit donc $K_1 e^{-\omega_0 t} + K_2\, t\, e^{-\omega_0 t}$.

Équation complète

Pourvu que l'on ait identifié une solution particulière $y_{\text{part}}(t)$ de l'équation complète, nous avons donc la solution générale de l'équation :

$$y_{\text{géné}}(t) = y_{\text{part}}(t) + K_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + K_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \qquad \text{dans le cas de l'amortissement fort}$$

$$y_{\text{géné}}(t) = y_{\text{part}}(t) + e^{-\frac{t}{\tau}}\left(K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t\right) \qquad \text{dans le cas de l'amortissement faible}$$

$$y_{\text{géné}}(t) = y_{\text{part}}(t) + \left(K_1 + K_2\, t\right) e^{-\omega_0 t} \qquad \text{dans le cas de l'amortissement critique}$$

Il restera alors à tenir compte des conditions particulières imposées à la fonction $y(t)$ pour déterminer les valeurs des constantes d'intégration K_1 et K_2.

3.2. Composants linéaires

Dans le cadre de l'ARQS, nous appellerons dipôle linéaire un dipôle tel qu'il existe entre le courant $i(t)$ qui le traverse et la tension $u(t)$ à ses bornes une relation différentielle linéaire. Ces composants sont au nombre de trois : les résistances, les condensateurs et les bobines.

Résistances

Une résistance linéaire obéit à la loi d'Ohm. L'équation caractéristique en convention récepteur est de la forme : $u(t) = R\, i(t)$ ou, ce qui revient au même, $i(t) = G\, u(t)$ définissant ainsi la résistance R du composant et son inverse la conductance G. La puissance reçue par une résistance a pour expression, en convention récepteur :

$$p(t) = u(t)\, i(t) = R\, i^2(t)$$

Cette puissance est toujours fondamentalement positive : on parle de *puissance dissipée par effet Joule*.

Condensateurs

L'équation caractéristique d'un condensateur idéal est, en convention récepteur : $i(t) = C \dfrac{du(t)}{dt}$

Où C est la capacité du condensateur, qui se mesure en *farad* (symbole F).

La puissance reçue a pour expression, en convention récepteur :

$$p(t) = u(t)\, i(t) = C\, u(t) \frac{du(t)}{dt} = \frac{dU_e(t)}{dt} \qquad \text{avec} \qquad U_e(t) = \frac{1}{2} C\, u^2(t)$$

Nous définissons ainsi l'énergie électrique $U_e(t)$ emmagasinée dans le condensateur (il s'agit de l'énergie du champ électrique localisé entre les armatures). Cette énergie ne peut varier dans le temps que de façon continue, ce qui correspond à une règle fondamentale de comportement pour les régimes transitoire :

La tension aux bornes d'un condensateur est toujours nécessairement continue

Bobines

L'équation caractéristique d'une bobine idéale est, en convention récepteur : $u(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$

Où L est l'inductance de la bobine, qui se mesure en *henry* (symbole H).

La puissance reçue a pour expression, en convention récepteur :

$$p(t)=u(t)i(t)=L\,i(t)\frac{di(t)}{dt}=\frac{dU_{\mathrm{m}}(t)}{dt} \qquad \text{avec} \qquad U_{\mathrm{m}}(t)=\frac{1}{2}L\,i^2(t)$$

Nous définissons ainsi l'énergie magnétique $U_{\mathrm{m}}(t)$ emmagasinée dans la bobine (il s'agit de l'énergie du champ magnétique localisé dans le volume de la bobine). Cette énergie ne peut varier dans le temps que de façon continue, ce qui correspond à une règle fondamentale de comportement pour les régimes transitoire :

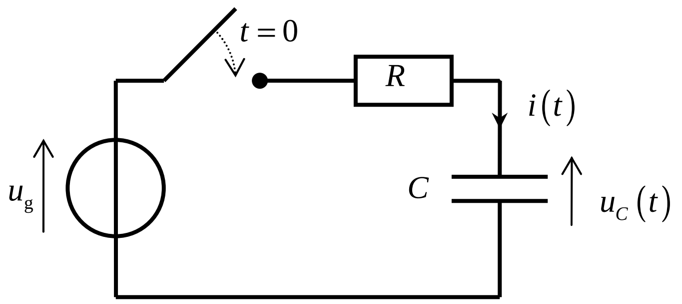
Le courant traversant une bobine est toujours nécessairement continu

3.3. Régimes transitoires du premier ordre

Nous nommons ainsi les régimes transitoires régis par une équation différentielle du premier ordre, c'est-à-dire une équation différentielle dans laquelle n'interviennent que la fonction elle-même et sa dérivée première.

Charge d'un condensateur

Un condensateur initialement non chargé, en série avec une résistance *R*, est soumis à un échelon de tension : à l'instant $t=0$, on ferme l'interrupteur de telle sorte que la tension constante u_{g} soit appliquée aux bornes du circuit *RC*.



Pour $t>0$, la loi des mailles appliquée à ce circuit s'écrit : $RC\dfrac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=u_{\mathrm{g}}$

Nous l'écrirons sous la forme canonique, en posant $\tau=RC$, constante de temps du circuit *RC* :

$$\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{u_C(t)}{\tau}=\frac{u_{\mathrm{g}}}{\tau}$$

Dès lors, mettons en œuvre notre méthode en quatre points :

- Une solution particulière de cette équation correspond au régime permanant : $u_{C\,\mathrm{part}}(t)=u_{\mathrm{g}}$

• • La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit : $u_{C\text{ssm}}(t) = K\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

• • • Nous en déduisons la solution générale de l'équation complète : $u_{C\text{géné}}(t) = u_\text{g} + K\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

• • • • Enfin, le condensateur étant initialement non chargé, la tension $u_C(t)$ qui est nulle pour $t<0$ doit être nulle pour $t=0$: $u_C(0) = u_\text{g} + K = 0$. Nous en déduisons $K = -u_\text{g}$ et, par conséquent l'expression de la fonction $u_C(t)$:

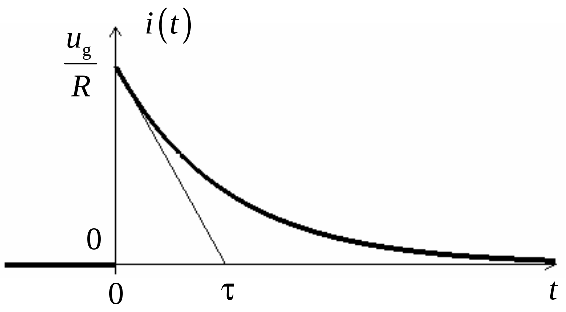
$$u_C(t) = u_\text{g}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

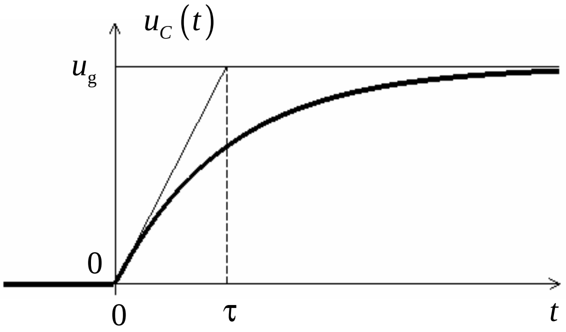
Remarque : concrètement après un temps supérieur à sept fois la constante de temps, on se rapproche du régime permanent à mieux d'un millième.

Le courant $i(t)$ présente une discontinuité à l'instant initial et a pour expression pour $t>0$:

$$i(t) = \frac{u_\text{g}}{R}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Les chronogrammes correspondants sont représentés ci-dessous :





Point de vue énergétique

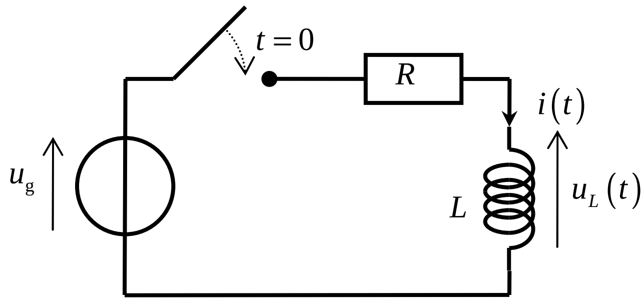
A l'instant *t*, le générateur a fourni l'énergie $U_\text{g}(t) = \int_0^t u_\text{g}\,i(t)\,dt = C\,u_\text{g}^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Une partie $U_R(t) = \int_0^t R\,i^2(t)\,dt$ de cette énergie a été dissipée par effet Joule dans la résistance et le complément se trouve emmagasiné sous forme d'énergie électrique dans le condensateur : $U_C(t) = \frac{1}{2}C\,u_C^2(t)$.

Remarque : au bout d'un temps très grand devant la constante de temps τ, la moitié seulement de l'énergie $C\,u_\text{g}^2$ fournie par le générateur est emmagasinée dans le condensateur sous forme d'énergie électrique. L'autre moitié est dissipée sous forme de chaleur dans la résistance et ce ratio est indépendant de la valeur de la résistance.

Établissement d'un courant dans une bobine

Une bibine idéale d'inductance L en série avec une résistance R, est soumis à un échelon de tension : à l'instant $t=0$, on ferme l'interrupteur de telle sorte que la tension constante u_g soit appliquée aux bornes du circuit RL.



Pour $t>0$, la loi des mailles appliquée à ce circuit s'écrit : $L\dfrac{di(t)}{dt}+R\,i(t)=u_g$

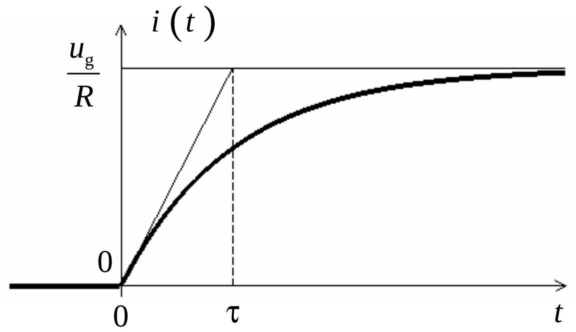
Nous l'écrirons sous la forme canonique, en posant $\tau=\dfrac{L}{R}$, constante de temps du circuit RL :

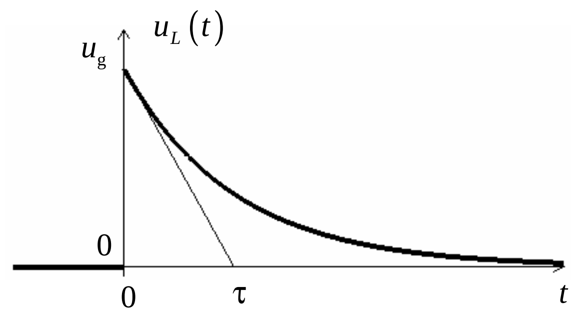
$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{i(t)}{\tau}=\frac{i_g}{\tau}$$

Nous voyons qu'en introduisant le courant électromoteur $i_g=\dfrac{u_g}{R}$, le problème est mathématiquement identique au problème précédent de la charge du condensateur. Nous dirons qu'il s'agit du problème *dual*. Nous en déduisons, sans autre calcul, pour $t>0$:

$$i(t)=i_g\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \text{et} \qquad u_L(t)=u_g e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ainsi que les chronogrammes correspondants :





Point de vue énergétique

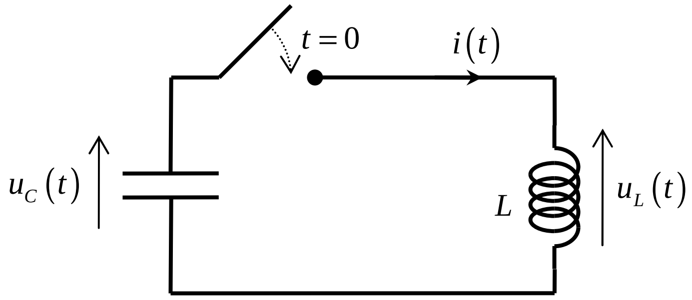
A l'instant *t*, le générateur a fourni l'énergie $U_g(t)=\int_0^t u_g\, i(t)\,dt=Ri_g^2t-Li_g^2\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

Une partie $U_R(t)=\int_0^t R\,i^2(t)\,dt$ de cette énergie a été dissipée par effet Joule dans la résistance et le complément se trouve emmagasiné sous forme d'énergie magnétique dans la bobine : $U_L(t)=\dfrac{1}{2}L\,i^2(t)$.

3.4. Régimes transitoires du second ordre

Circuit résonant non amorti

Imaginons une maille constituée de l'association d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur parfait de capacité C. Initialement le condensateur est chargé sous une tension $u_C(0) = u_0$ et l'on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.



Pour $t > 0$, les tensions $u_C(t)$ et $u_L(t)$ sont identiques et nous poserons $u_C(t) = u_L(t) = u(t)$.

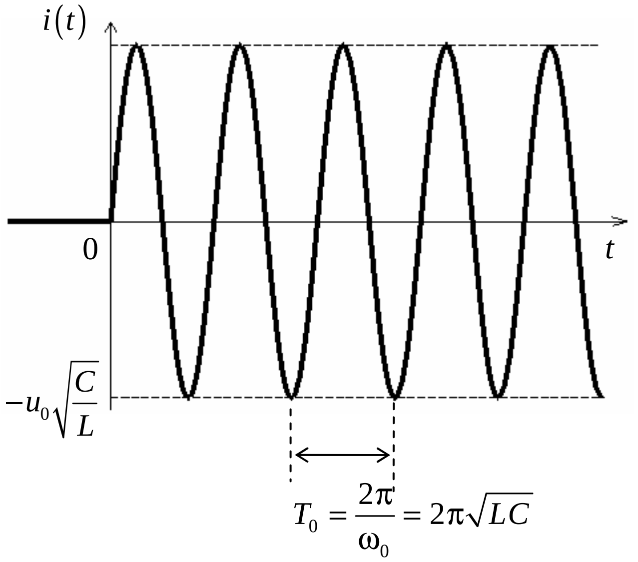
Les équations caractéristiques des composants s'écrivent : $i(t) = -C\dfrac{du(t)}{dt}$ et $u(t) = +L\dfrac{di(t)}{dt}$

La tension $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ obéissent l'une et l'autre à la même équation différentielle harmonique qui s'écrivent, en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$:

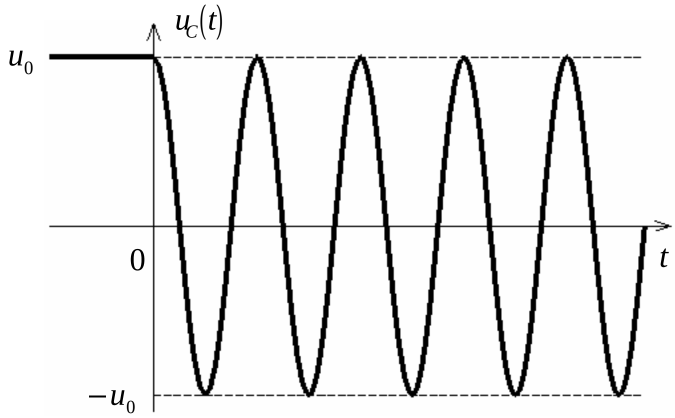
$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \omega_0^2\, i(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2\, u(t) = 0$$

Les solutions de ces équations sont des fonctions harmoniques de pulsation ω_0, en sinus pour la fonction $i(t)$ qui doit être nulle à l'instant $t = 0$ par nécessité de continuité du courant dans la bobine. En conséquence la tension aux bornes du condensateur varie en cosinus et son amplitude est égale à u_0 par nécessité de continuité de la tension $u(t)$. Nous en déduisons les chronogrammes correspondants.

$i(t) = u_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}\sin\omega_0 t$



$u_C(t) = u_0\cos\omega_0 t$



Un circuit LC idéal dont le condensateur est chargé est le siège d'oscillations périodiques non amorties, de période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$.

Point de vue énergétique

La puissance dissipée dans le circuit LC idéal a pour expression $P(t) = u(t)\,i(t) = \dfrac{u_0^2}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}\sin(2\omega_0 t)$

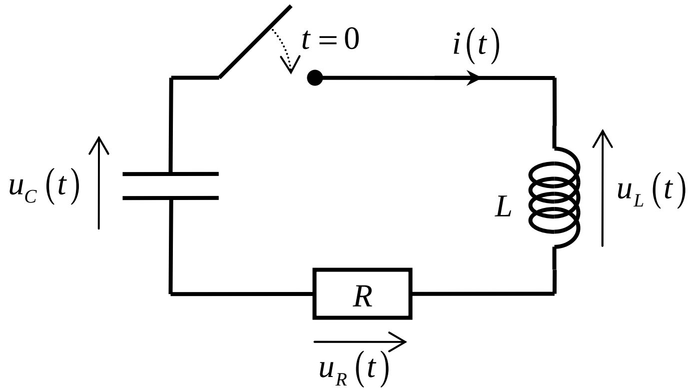
Cette puissance a une valeur moyenne nulle.

Les oscillations du circuit LC idéal correspondent à une oscillation d'énergie entre la forme électrique $U_\mathrm{e}(t) = \dfrac{1}{2}C\,u^2(t)$ emmagasinée dans le volume du condensateur et la forme magnétique $U_\mathrm{m}(t) = \dfrac{1}{2}L\,i^2(t)$ emmagasinée dans le volume de la bobine.

L'énergie électromagnétique totale est constante : $U_\mathrm{e}(t) + U_\mathrm{m}(t) = \dfrac{1}{2}C\,u_0^2$

Circuit résonant amorti

Nous allons traiter le même problème de façon plus réaliste en introduisant une résistance R non nulle en série avec les deux composants réactifs.



La loi des mailles s'écrit : $u_C(t) = u_L(t) + u_R(t)$ et, en dérivant cette équation, nous obtenons l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit l'intensité $i(t)$ pour $t > 0$:

$$L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants positifs et nous savons que la nature de la solution dépend du degré d'amortissement.

Nous poserons $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et nous appellerons *résistance critique* du circuit LC la grandeur $R_\mathrm{c} = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Avec ces notations, en posant $m = \dfrac{R}{R_\mathrm{c}}$, l'équation différentielle s'écrit sous la forme canonique :

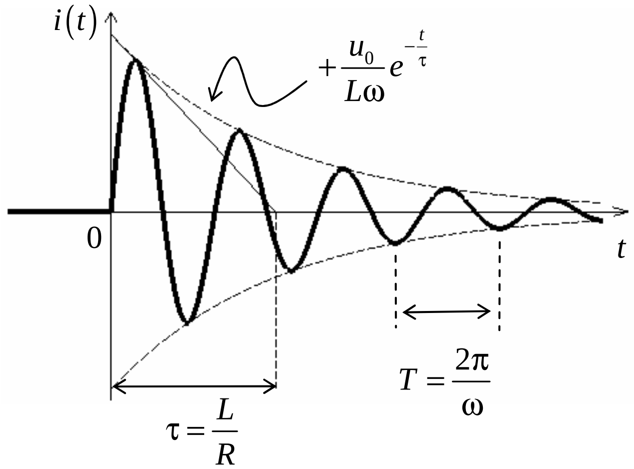
$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2m\,\omega_0\frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2\, i(t) = 0$$

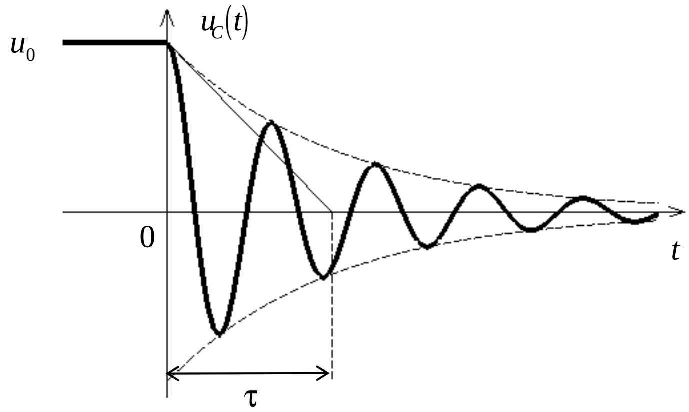
Amortissement faible : R < Rc

Avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$ et $\dfrac{1}{\tau} = m\,\omega_0$, les chronogrammes ci-dessous correspondent à la valeur $m = 0{,}10$

La pseudo période T est alors supérieure seulement d'un peu plus de cinq millièmes à la période propre des oscillations non amorties $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

$$i(t) = \frac{u_0}{L\omega}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \sin \omega t \qquad u_C(t) = u_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos \omega t + \frac{1}{\omega\tau}\sin \omega t\right)$$

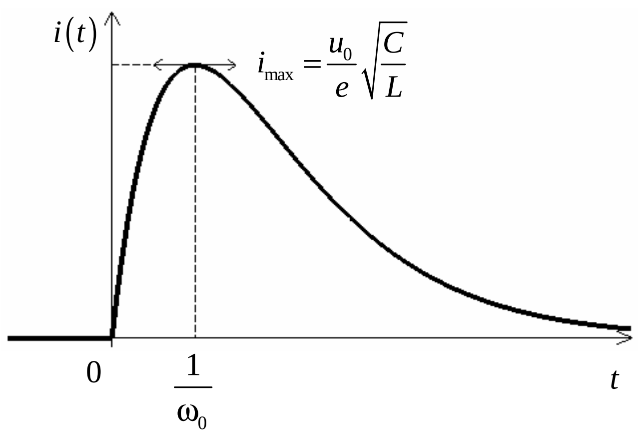


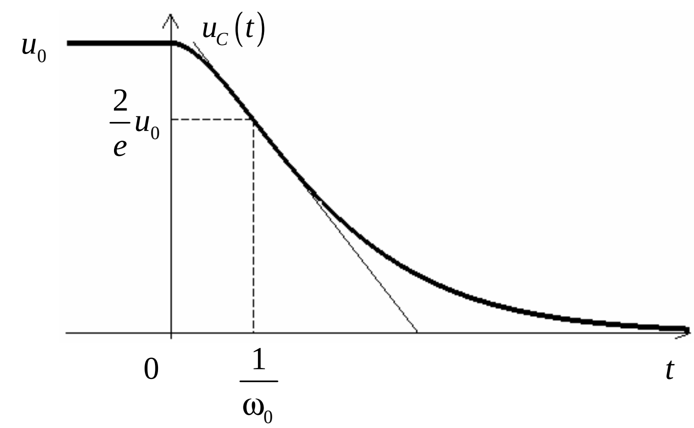


Amortissement critique : R = Rc

Les chronogrammes ci-dessous correspondent à la valeur critique $m = 1$

$$i(t) = \frac{u_0}{L}\, t\, e^{-\omega_0 t} \qquad u_C(t) = u_0\,(1+\omega_0 t)\, e^{-\omega_0 t}$$





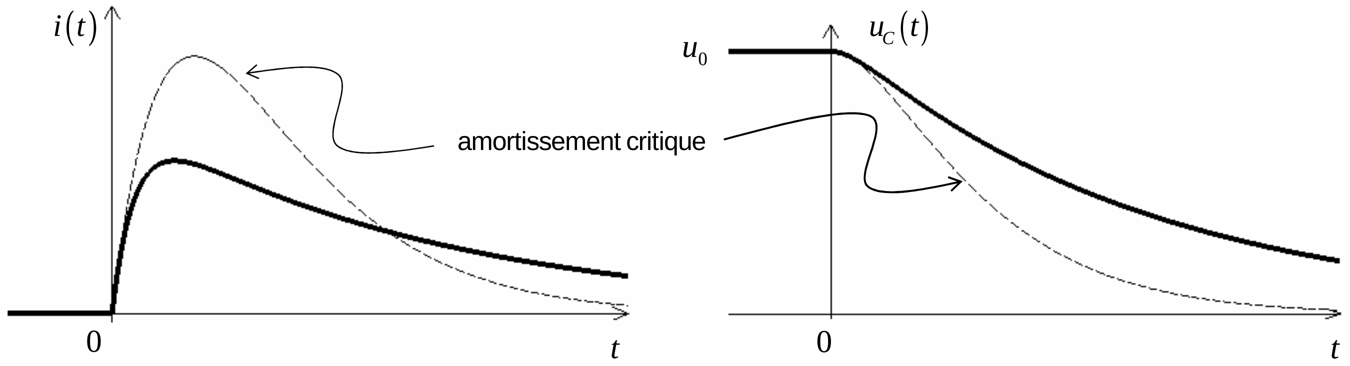
Remarque : lorsque m tend vers 1 par valeur inférieure, c'est-à-dire lorsque d'un amortissement faible $(m<1)$ on tend vers la valeur critique $(m=1)$, la pseudo période T tend vers l'infini. C'est de cette façon que l'on passe continûment d'une fonction sinusoïdale amortie à une fonction de type exponentiel ne présentant plus aucune oscillation.

Amortissement fort : R > Rc

Avec $\omega = \omega_0\sqrt{m^2-1}$ et $\dfrac{1}{\tau} = m\,\omega_0$, les chronogrammes ci-dessous correspondent à la valeur $m = 2$.

Les expressions de $i(t)$ et de $u_C(t)$ sont semblables au cas de l'amortissement faible en remplaçant les fonctions trigonométriques par les fonctions hyperboliques.

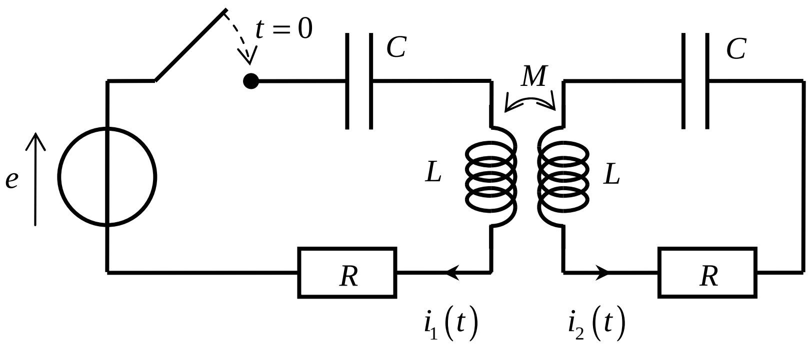
$$i(t) = \frac{u_0}{L\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sinh \omega t \qquad\qquad u_C(t) = u_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cosh \omega t + \frac{1}{\omega\tau} \sinh \omega t \right)$$



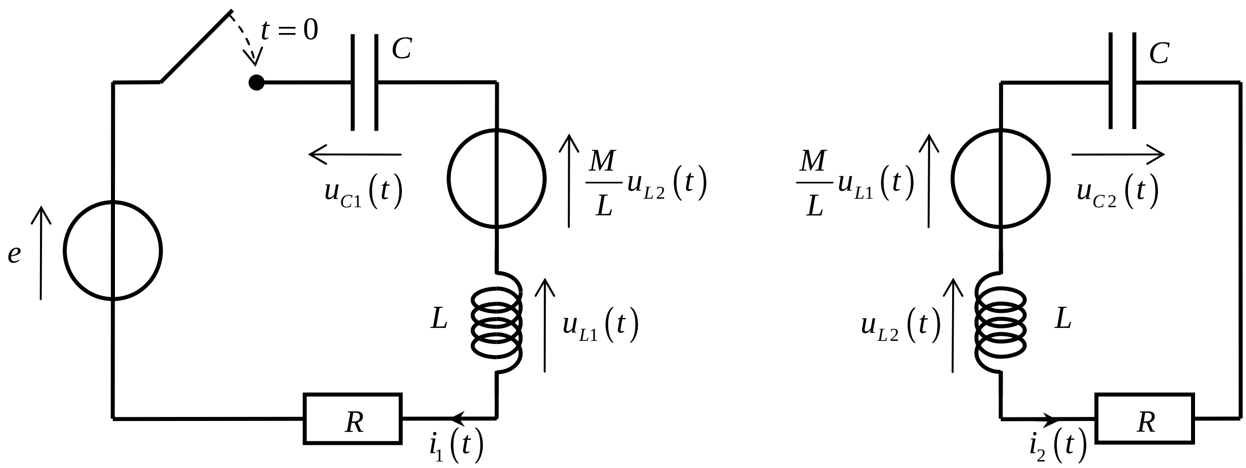
Remarque : les fonctions $i(t)$ et de $u_C(t)$ peuvent s'exprimer sous la forme d'une somme de deux exponentielles décroissantes de constantes de temps $\tau_1 = \left(m + \sqrt{m^2 - 1}\right)\sqrt{LC}$ et $\tau_2 = \left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)\sqrt{LC}$. Au bout d'un certain temps, seule subsiste l'exponentielle correspondant à la constante de temps la plus grande : $e^{-\frac{t}{\tau_1}}$.

3.5. Régimes transitoires couplés

Nous allons étudier, à titre d'exemple, un régime transitoire correspondant à deux circuits *RLC* série identiques couplés par mutuelle induction. Les condensateurs étant initialement déchargés, on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.



Nous pouvons rendre compte des effets d'induction mutuelle en terme de *sources de tension commandées en tension* et établir le schéma équivalent suivant :



En prenant pour fonctions inconnues les tensions $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$ aux bornes des condensateurs, les équations de mailles s'écrivent sous la forme de deux équations différentielles du second ordre couplées[1].

$$\begin{cases} u_{C1}(t)+RC\dfrac{du_{C1}(t)}{dt}+LC\dfrac{d^2u_{C1}(t)}{dt^2}+MC\dfrac{d^2u_{C2}(t)}{dt^2}=e \\ u_{C2}(t)+RC\dfrac{du_{C2}(t)}{dt}+LC\dfrac{d^2u_{C2}(t)}{dt^2}+MC\dfrac{d^2u_{C1}(t)}{dt^2}=0 \end{cases}$$

Étant donné la symétrie du problème, le changement de fonctions inconnues $v_+(t)=u_{C1}(t)+u_{C2}(t)$ et $v_-(t)=u_{C1}(t)-u_{C2}(t)$ s'impose. Nous obtenons les équations différentielles découplées auxquelles satisfont les fonctions $v_+(t)$ et $v_-(t)$ en faisant la somme et la différence des équations précédentes :

$$\frac{d^2v_+(t)}{dt^2}+\frac{R}{L+M}\frac{dv_+(t)}{dt}+\frac{v_+(t)}{(L+M)C}=e \quad \text{et} \quad \frac{d^2v_-(t)}{dt^2}+\frac{R}{L-M}\frac{dv_-(t)}{dt}+\frac{v_-(t)}{(L-M)C}=e$$

Les conditions aux limites imposent des tensions initiales nulles aux bornes des condensateurs, mais aussi des courant initiaux nuls. Cela fait que les fonctions $v_+(t)$ et $v_-(t)$ doivent satisfaire aux conditions : $v_+(0)=v_-(0)=0$ et $\dfrac{dv_+}{dt}(0)=\dfrac{dv_-}{dt}(0)=0$

Nous savons résoudre ces équations dans tous les cas de figure, mais cela suppose une discussion selon la nature de l'amortissement.

Nous nous bornerons ici à exprimer les solutions dans le cas d'un amortissement nul $(R=0)$.

En posant $\omega_+=\dfrac{1}{\sqrt{(L+M)C}}$ et $\omega_-=\dfrac{1}{\sqrt{(L-M)C}}$, les équations du système non amorti s'écrivent alors sous la forme canonique de deux équations harmoniques :

$$\frac{d^2v_+(t)}{dt^2}+\omega_+^2\,v_+(t)=e \quad \text{et} \quad \frac{d^2v_-(t)}{dt^2}+\omega_-^2\,v_-(t)=e$$

Les solutions sinusoïdales correspondant aux conditions initiales sont les suivantes :

$$v_+(t)=e(1-\cos\omega_+t) \quad \text{et} \quad v_-(t)=e(1-\cos\omega_-t)$$

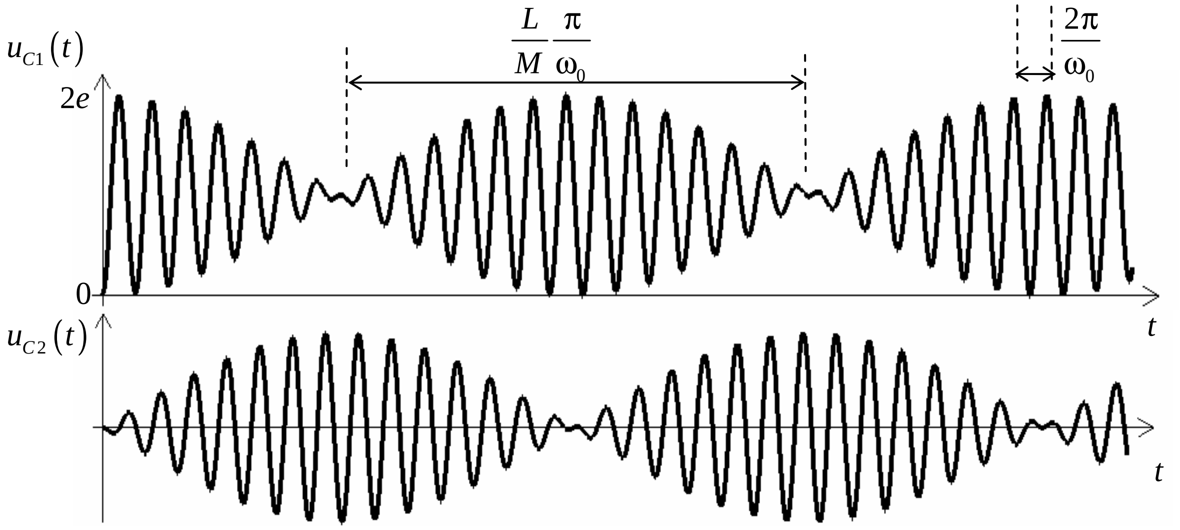
Nous en déduisons les expressions de $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$:

$$\begin{cases} u_{C1}(t)=\dfrac{v_+(t)+v_-(t)}{2}=e\left[1-\dfrac{\cos\omega_+t+\cos\omega_-t}{2}\right]=e\left[1-\cos\left(\dfrac{\omega_+-\omega_-}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_++\omega_-}{2}t\right)\right] \\ u_{C2}(t)=\dfrac{v_+(t)-v_-(t)}{2}=e\dfrac{\cos\omega_-t-\cos\omega_+t}{2}=e\sin\left(\dfrac{\omega_+-\omega_-}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_++\omega_-}{2}t\right) \end{cases}$$

[1] Le coefficient d'induction mutuelle *M* qui intervient ici, homogène à une inductance, sera défini précisément lors de l'étude des phénomènes d'induction, plus tard dans le cours.

En particulier, dans le cas d'un couplage inductif faible, c'est-à-dire lorsque $M \ll L$, en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, nous avons dans une approximation au premier ordre en $\dfrac{M}{L}$:

$$\begin{cases} u_{C1}(t) \simeq e\left[1-\cos\left(\dfrac{M}{L}\omega_0 t\right)\cos\omega_0 t\right] \\ u_{C2}(t) \simeq e\sin\left(\dfrac{M}{L}\omega_0 t\right)\sin\omega_0 t \end{cases}$$

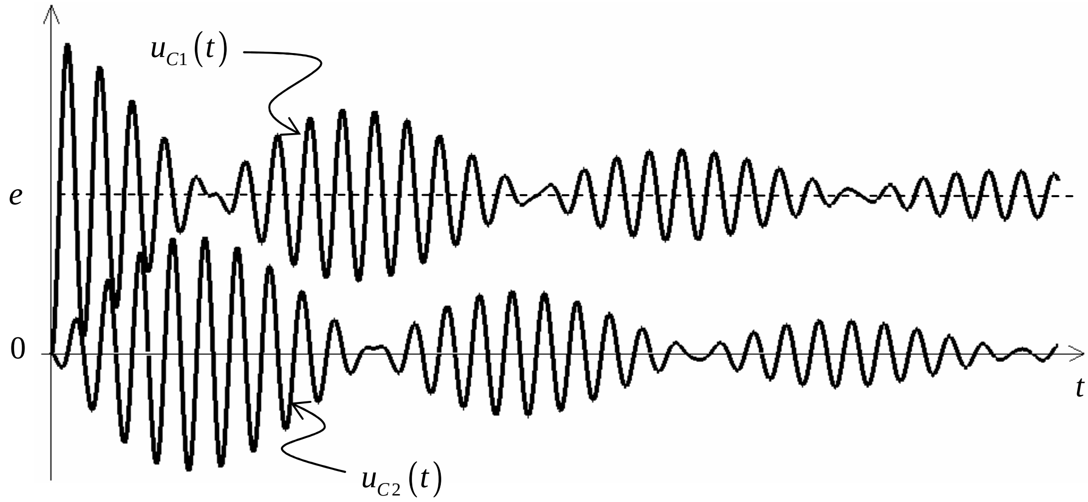


Un produit de fonctions périodiques n'est pas *a priori* périodique, mais dans ces conditions où la période $\dfrac{2\pi}{\omega_0}\dfrac{L}{M}$ est très grande par rapport à la période $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$, il apparaît un phénomène de *battements* de « période » $\dfrac{\pi}{\omega_0}\dfrac{L}{M}$.

L'énergie électromagnétique, qui oscille initialement dans le circuit 1 entre le condensateur et la bobine, est progressivement transmise au circuit 2. Ce transfert s'effectue dans un temps caractéristique qui est d'autant plus long que l'inductance mutuelle M est faible (le graphe précédent correspond à la valeur $M = 0{,}1\,L$).

Ce transfert d'énergie se fait idéalement sans perte dans le cas où l'on ne prend pas en compte l'effet Joule. Le programme MAPLE suivant prend en compte un amortissement faible :

```
> restart:
  E:=1:L:=1:C:=1:M:=0.1:R:=0.02:
  i1:=C*diff(uC1(t),t): i2:=C*diff(uC2(t),t):
  uL1:=L*diff(i1,t):    uL2:=L*diff(i2,t):
  uM1:=M*diff(i2,t):    uM2:=M*diff(i1,t):
  maille1:=uL1+uM1+R*i1+uC1(t)=E:
  maille2:=uL2+uM2+R*i2+uC2(t)=0:
  conditions:=D(uC1)(0)=0,D(uC2)(0)=0,uC1(0)=0,uC2(0)=0:
  dsolve({maille1,maille2,conditions},{uC1(t),uC2(t)}):
  assign(%):
  plot([uC1(t),uC2(t)],t=0..200);
```



Nous voyons que dans ces conditions, l'énergie électromagnétique fait toujours des allers-retours entre le circuit 1 et le circuit 2, mais les pertes par effet Joule sont manifestes. Dans la limite où M est extrêmement petit, les effets d'amortissement dans le circuit 1 interviennent avant que n'ait pu se réaliser le moindre transfert du circuit 1 vers le circuit 2.