ÉLECTROCINÉTIQUE

Chapitre 4

Régimes sinusoïdaux forcés quasi stationnaires

Il s'agit à nouveau d'un chapitre de révision. Le calcul symbolique a été introduit en première année et nous retrouvons ici toutes les définitions et tous les théorèmes relatifs aux régimes sinusoïdaux forcés dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires. Ces connaissances et ces mêmes techniques mathématiques seront utilisées en électromagnétisme et en optique ondulatoire.

4.1. Signaux sinusoïdaux

Définitions

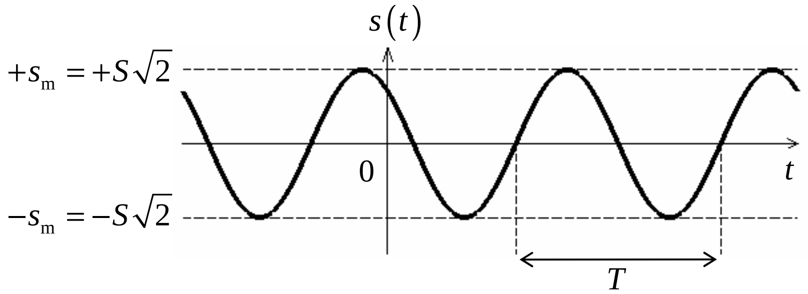
Une grandeur physique $s(t)$ sera dite « harmonique » ou « sinusoïdale » si sa dépendance temporelle est une fonction sinusoïdale du temps. La forme la plus générale d'une telle fonction est la suivante :

$$s(t) = s_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi) = S\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

Dans la première forme, $s_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi)$, sont définies l'*amplitude* s_{m} (*a priori* positive) ainsi que sa *phase* φ. Les valeurs extrémales sont $-s_{\mathrm{m}}$ et $+s_{\mathrm{m}}$ et l'amplitude « *crête à crête* » a pour valeur $2s_{\mathrm{m}}$.

ω s'appelle la pulsation et la *période temporelle* du signal a pour valeur $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

L'inverse de la période s'appelle la *fréquence* : $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$



Dans la deuxième forme, $S\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$, est définie la *valeur efficace* S (*toujours* positive). Cette valeur efficace est définie comme la racine carrée de la valeur moyenne du carré de $s(t)$, en anglais *root mean square*.

$$S = s_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt} = \frac{s_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$

Enfin, dans la dernière forme $s(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ sont définies les amplitudes en cosinus et en sinus qui vérifient la relation : $a^2 + b^2 = s_\text{m}^2 = 2S^2$

Validité de l'hypothèse quasi stationnaire

Les « signaux » $s(t)$ seront des tensions $u(t)$, des courants $i(t)$, des forces électromotrices $e(t)$ ou des courants électromoteurs $\eta(t)$ définis dans l'approximation des circuits filiformes en régime quasi stationnaire.

Nous étudierons dans le cadre de l'électromagnétisme la propagation des champs qui sont à l'origine des phénomènes électriques. Ces champs se propagent à la vitesse de la lumière $c = 3{,}00 \times 10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour rester dans le cadre de l'ARQS, il faut que les temps de propagation des signaux d'un bout à l'autre du montage électrique soient petits devant la période T de ces signaux.

En notant ℓ la dimension caractéristique du montage électrique, cette relation s'écrit : $\ell \ll cT$.

Rappelons que pour une fréquence $\nu \leq 10\ \text{MHz}$, soit $T \geq 10^{-7}\ \text{s}$, cela conduit à la condition $\ell \ll 30\ \text{m}$ généralement satisfaite dans le cadre de nos expériences de laboratoire en électricité.

4.2. Méthode symbolique

Linéarité

Toute combinaison linéaire de fonctions harmoniques est une fonction harmonique de même pulsation ω. De plus, les dérivées, à quelque ordre que ce soit, de fonctions harmoniques sont des fonctions harmoniques de même pulsation ω.

Nous limiterons nos applications aux seuls cas ou les relations entre les différents signaux sont des relations différentielles linéaires. Dans ce cadre, ces relations différentielles correspondent à des relations linéaires entre fonctions harmoniques de même pulsation ω.

A chaque signal réel $s(t) = s_\text{m}\cos(\omega t + \varphi)$, nous associons un signal complexe[1] $\underline{s(t)} = s_\text{m}\, e^{j(\omega t + \varphi)}$ dont la partie réelle correspond au signal réel. Tous les signaux complexes sont proportionnels à $e^{j\omega t}$ et nous appellerons « amplitude complexe » le coefficient de proportionnalité $\underline{s_\text{m}} = s_\text{m}\, e^{j\varphi} = S\sqrt{2}\, e^{j\varphi}$.

Avec cette définition, les relations différentielles linéaires réelles que satisfont les signaux réels se traduisent par des relations linéaires algébriques complexes entre signaux complexes ou, cela revient au même, entre amplitudes complexes. Nous savons plus simplement résoudre des systèmes d'équations algébriques sur $\mathbb{C}$ que des systèmes d'équations différentielles sur $\mathbb{R}$: c'est tout l'intérêt de la méthode symbolique.

En particulier l'amplitude complexe associée à la dérivée d'une fonction harmonique est égale à l'amplitude complexe de cette fonction multipliée par $j\omega$. L'amplitude complexe associée à la primitive harmonique (primitive de valeur moyenne nulle) d'une fonction harmonique est égale à l'amplitude complexe de cette fonction divisée par $j\omega$.

[1] C'est l'usage, en électricité, de noter *j* le complexe imaginaire pur de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Pour d'autres domaines d'application en physique, la notion traditionnelle *i* sera systématiquement utilisée.

$$s(t)=s_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)\leftrightarrow \underline{s_{\mathrm{m}}}=s_{\mathrm{m}}\,e^{j\varphi}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{ds(t)}{dt}\leftrightarrow j\omega\underline{s_{\mathrm{m}}}\\ \displaystyle\int s(t)\,dt\leftrightarrow\dfrac{\underline{s_{\mathrm{m}}}}{j\omega}\end{cases}$$

Attention ! Les règles du calcul algébrique sur $\mathbb{C}$ sont certes plus commodes à appliquer que ne le sont les recherches de solutions particulières sinusoïdales d'équations différentielles par des méthodes trigonométriques, encore faut-il maîtriser le calcul algébrique sur $\mathbb{C}$!

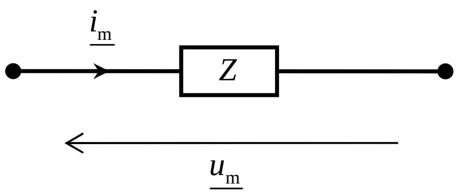
Et surtout, il ne faut pas oublier que le passage par la représentation complexe n'est qu'un artifice de calcul : au bout du compte, il convient d'exprimer la fonction harmonique réelle recherchée en prenant la partie réelle de la représentation complexe $s(t)=\Re\acute{\mathrm{e}}\left(\underline{s(t)}\right)$, soit avec les notations usuelles : $s_{\mathrm{m}}=\left|\underline{s_{\mathrm{m}}}\right|$ et $\varphi=\arg\left(\underline{s_{\mathrm{m}}}\right)$.

Remarque : il est possible également de définir une *amplitude efficace complexe*, par la relation $\underline{S}=\dfrac{\underline{s_{\mathrm{m}}}}{\sqrt{2}}$.

Impédance complexe

Définition

Considérons un dipôle linéaire passif, éventuellement réactif, soumis à une tension sinusoïdale $u(t)=u_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)$ d'amplitude complexe $\underline{u_{\mathrm{m}}}=u_{\mathrm{m}}e^{j\varphi_u}$. Ce dipôle est alors parcouru par un courant sinusoïdal $i(t)=i_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)$ d'amplitude complexe $\underline{i_{\mathrm{m}}}=i_{\mathrm{m}}e^{j\varphi_i}$. On appelle *impédance* du dipôle linéaire, le rapport des amplitudes complexes $\underline{u_{\mathrm{m}}}$ et $\underline{i_{\mathrm{m}}}$ lorsque courants et tensions sont repérés en convention récepteur.



$$\underline{Z}=\frac{\underline{u_{\mathrm{m}}}}{\underline{i_{\mathrm{m}}}}=\frac{u_{\mathrm{m}}}{i_{\mathrm{m}}}e^{j(\varphi_u-\varphi_i)}$$

Le module de l'impédance, ***homogène à une résistance***, définit le rapport de l'amplitude de la tension sur l'amplitude du courant ou, aussi bien, le rapport des valeurs efficaces :

$$\left|\underline{Z}\right|=\frac{u_{\mathrm{m}}}{i_{\mathrm{m}}}=\frac{U}{I}$$

L'argument de l'impédance définit la différence de phase entre la tension et le courant :

$$\arg\underline{Z}=\varphi_u-\varphi_i$$

Remarque : à la différence des amplitudes complexes dont les arguments dépendent du choix de l'origine du temps, l'impédance représente le dipôle de façon absolue, son argument est indépendant du choix de l'origine du temps.

La partie réelle de l'impédance s'appelle la *résistance* R du dipôle et la partie imaginaire de l'impédance s'appelle la *réactance* X du dipôle : $\underline{Z}=R+j\,X$

On appelle *admittance* $\underline{Y}$ l'inverse de l'impédance : $\underline{Y}=\dfrac{1}{\underline{Z}}$

Dipôles particuliers

Dans le cas particulier d'une résistance de l'équation caractéristique $u(t)=Ri(t)$ nous déduisons la relation entre amplitudes complexes : $\underline{u_m} = R\underline{i_m}$. L'impédance est égale à R et elle est réelle : courant et tension sont en phase.

Pour une bobine idéale, l'équation caractéristique s'écrit : $u(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$. Nous en déduisons la relation $\underline{u_m} = jL\omega\underline{i_m}$ qui définit l'impédance $Z_L = jL\omega$, imaginaire pure.

La tension aux bornes d'une bobine est en *quadrature de phase avance* sur le courant.

Pour un condensateur idéal, l'équation caractéristique s'écrit : $i(t)=C\dfrac{du(t)}{dt}$. Nous en déduisons la relation $\underline{i_m} = jC\omega\underline{u_m}$ qui définit l'impédance $Z_C = \dfrac{1}{jC\omega}$, également imaginaire pure.

La tension aux bornes d'un condensateur est en *quadrature de phase retard* sur le courant.

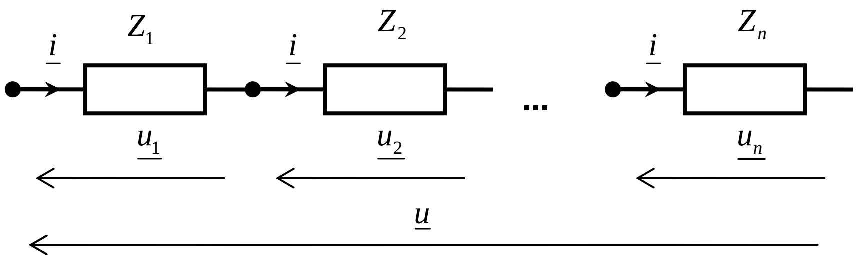
Association d'impédances

Comme conséquence des mêmes règles de linéarité, les impédances et admittances obéissent aux mêmes règles en calcul symbolique des régimes sinusoïdaux que les résistances et conductances pour les régimes continus.

Attention ! Ces règles ne peuvent évidemment pas être appliquées directement aux fonctions réelles sinusoïdales.

Association d'impédances en série, division de tension

L'impédance équivalente d'un ensemble de dipôles d'impédances $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ montés en série est égale à la somme des impédances : $Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$



La tension complexe $\underline{u_1}$ aux bornes de l'impédance Z_1 peut s'exprimer comme une fraction de la tension complexe totale $\underline{u}$ aux bornes de la ligne d'impédances :

$$\underline{u_1} = \underline{u}\,\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}$$

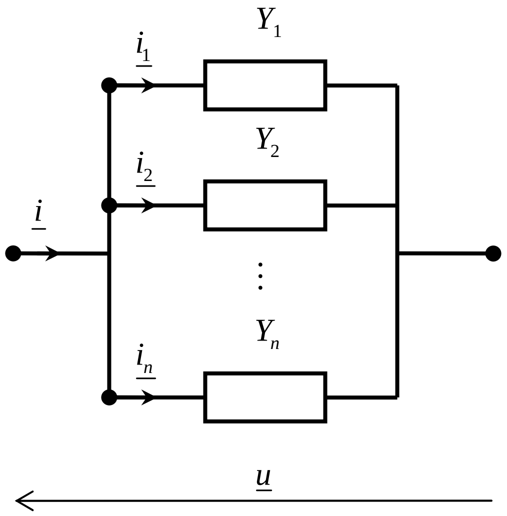
Le principe de la ***division de tension*** symbolique.

Association d'impédances en parallèle, division de courant

Rappelons que l'admittance Y d'un dipôle ohmique linéaire est définie comme l'inverse le la valeur de son impédance Z.

L'admittance équivalente d'un ensemble de dipôles d'admittances $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$, montés en parallèle est égale à la somme des admittances.

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$



La courant complexe $\underline{i}_1$ traversant le dipôle d'admittance Y_1 peut s'exprimer comme une fraction du courant complexe total $\underline{i}$ traversant l'ensemble des dipôles :

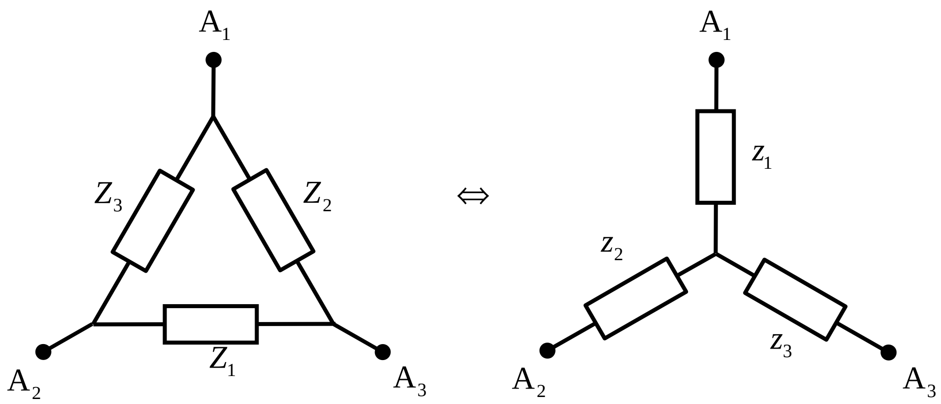
$$\underline{i}_1 = \underline{i}\, \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n} = \underline{i}\, \frac{\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}}$$

C'est le principe de la ***division de courant*** symbolique.

Transformation triangle $\rightarrow$ étoile

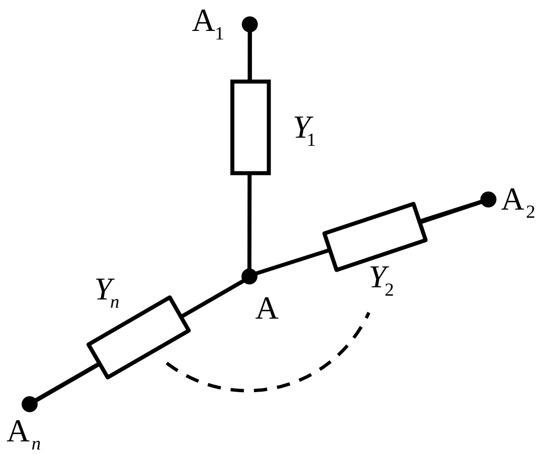
Considérons trois impédances Z_1, Z_2 et Z_3 formant une maille triangulaire $A_1A_2A_3$. Une connexion en étoile de trois impédances z_1, z_2 et z_3 convergeant en un seul nœud est équivalente pourvu que soient satisfaites simultanément les trois relations :

$$z_1 = \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}, \quad z_2 = \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad \text{et} \quad z_3 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$



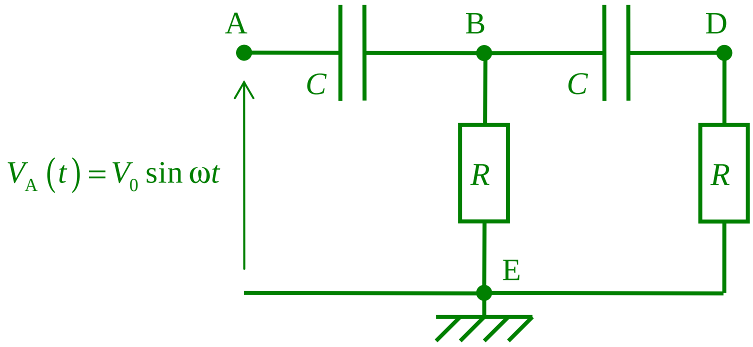
Théorème de Millman

Considérons un ensemble de dipôles linéaires $\mathrm{A_1A}$, $\mathrm{A_2A}$, $\cdots$, $\mathrm{A}_n\mathrm{A}$ convergeant en un même nœud A d'un réseau électrique en régime sinusoïdal. Le potentiel complexe au nœud A est le barycentre des potentiels complexes aux points A_k affectés de poids ayant pour valeur les admittances $\underline{Y}_k$ de ces dipôles.



$$\underline{V}(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \underline{V}(\mathrm{A}_k)}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k}$$

Exemple : on souhaite déterminer le potentiel au point D dans le montage suivant où l'on connaît le potentiel au point A et où la relation $RC\omega = 1$ est satisfaite



En appliquant le théorème de Millman au point B nous obtenons :

$$\underline{V}_\mathrm{B} = \frac{jC\omega \underline{V}_\mathrm{A} + jC\omega \underline{V}_\mathrm{D} + \frac{1}{R}\underline{V}_\mathrm{E}}{2jC\omega + \frac{1}{R}} = \frac{j\underline{V}_\mathrm{A} + j\underline{V}_\mathrm{D}}{2j+1}$$

Avec $\underline{V}_\mathrm{E} = 0$ et $\underline{V}_\mathrm{D}$ qui s'exprime par division de tension : $\underline{V}_\mathrm{D} = \underline{V}_\mathrm{B} \dfrac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \underline{V}_\mathrm{B} \dfrac{j}{1+j}$

On en déduit $\underline{V}_\mathrm{D} = -\dfrac{1}{3j}\underline{V}_\mathrm{A}$, avec ici $\underline{V}_\mathrm{A} = -jV_0$, cela donne : $\underline{V}_\mathrm{D} = \dfrac{V_0}{3}$

Et, finalement l'expression de la fonction harmonique : $V_\mathrm{D}(t) = \dfrac{V_0}{3}\cos\omega t$

Nous voyons bien sur cet exemple toute l'efficacité du calcul symbolique. L'utilisation du théorème de Millman symbolique a permis de résoudre le problème sans jamais introduire le moindre courant dans les calculs.

4.3. Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

Générateurs linéaires

L'existence de signaux sinusoïdaux est due à la présence dans les réseaux d'éléments électromoteurs linéaires sinusoïdaux.

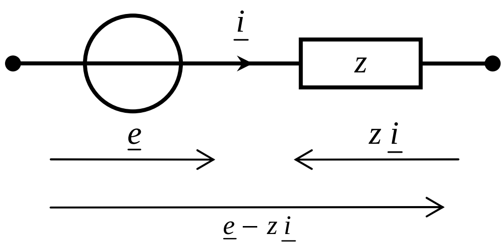
Nous envisagerons l'existence de générateurs idéaux de tension caractérisés par une force électromotrice $e(t) = e_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_e) = E\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_e)$ auxquels nous associerons une amplitude complexe $\underline{e_{\mathrm{m}}} = e_{\mathrm{m}}\, e^{j\varphi_e} = E\sqrt{2}\, e^{j\varphi_e}$ et de générateurs idéaux de courant caractérisés par un courant électromoteur $\eta(t) = \eta_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_\eta) = H\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_\eta)$ auxquels nous associerons une amplitude complexe $\underline{\eta_{\mathrm{m}}} = \eta_{\mathrm{m}}\, e^{j\varphi_\eta} = H\sqrt{2}\, e^{j\varphi_\mu}$.

Nous envisagerons également l'existence de générateurs linéaires pour lesquels existent deux représentations équivalentes, la représentation de Thévenin et la représentation de Norton.

Représentation de Thévenin

Si on note $\underline{e}$ la tension complexe à vide d'un générateur linéaire (force électromotrice complexe), l'équation caractéristique complexe s'écrit $\underline{u} = \underline{e} - z\,\underline{i}$ où z est l'impédance interne du générateur.

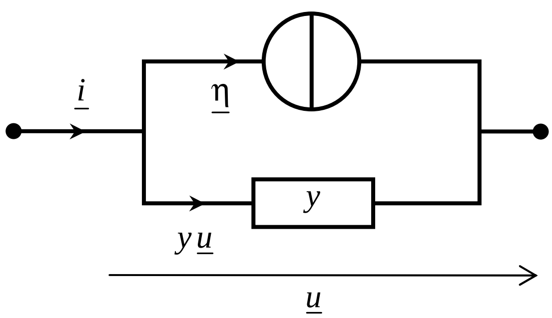
Le générateur équivaut à un générateur idéal de tension en série avec un dipôle linéaire d'impédance z. Ce montage correspond au ***schéma équivalent de Thévenin*** du générateur linéaire.



Cette représentation du générateur linéaire est particulièrement intéressante si l'on considère le montage en série de plusieurs générateurs linéaires : plusieurs générateurs linéaires associés en série sont équivalents à un seul générateur linéaire dont la force électromotrice complexe est égale à la somme algébrique des f.e.m. complexes des générateurs et dont l'impédance interne est égale à la somme des impédances internes des générateurs.

Représentation de Norton

La même équation caractéristique peut s'écrire sous la forme $\underline{i} = \underline{\eta} - y\,\underline{u}$ exprimant ainsi le courant complexe traversant un dipôle constitué par la mise en parallèle d'un générateur idéal de courant de courant électromoteur complexe $\underline{\eta}$ et d'une admittance y. Ce montage correspond au ***schéma équivalent de Norton*** du générateur linéaire.



Cette représentation du générateur linéaire est particulièrement intéressante si l'on considère le montage en parallèle de plusieurs générateurs linéaires : plusieurs générateurs linéaires associés en parallèle sont équivalents à un seul générateur linéaire dont le courant électromoteur complexe est égal à la somme ***algébrique*** des c.e.m. complexes des générateurs et dont l'admittance interne est égale à la somme des admittances internes des générateurs.

Que l'on écrive l'équation caractéristique complexe sous la forme $\underline{u} = \underline{e} - z\,\underline{i}$ ou sous la forme $\underline{i} = \underline{\eta} - y\,\underline{u}$, il s'agit de la même relation. L'admittance dans la représentation de Norton est donc égale à l'inverse de l'impédance dans la représentation de Thévenin et le courant électromoteur complexe est égal à la force électromotrice complexe divisée par l'impédance :

$$y = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad \underline{\eta} = \frac{\underline{e}}{z}$$

Symétries, antisymétrie, superposition

L'étude d'un réseau linéaire en régime sinusoïdal relève des mêmes principes que l'étude d'un réseau linéaire en régime continu. En particulier l'étude préalable des symétries ou antisymétries peut simplifier considérablement un calcul.

Symétrie

Si un réseau électrique présente une symétrie, alors les composants symétriques sont parcourus par des courants identiques et sont soumis aux mêmes tensions. Les nœuds symétriques sont à des potentiels électriques identiques. En conséquence, on ne change pas la situation électrocinétique d'un réseau en court-circuitant des nœuds symétriques, c'est-à-dire en les reliant par un fil non résistif pour qu'ils ne forment plus qu'un seul nœud. Réciproquement, on ne change pas la situation électrocinétique d'un réseau en défaisant une connexion située sur un plan de symétrie.

Antisymétrie dans un réseau linéaire

Dans un réseau linéaire, les courants et les tensions sont des fonctions linéaires des sources électromotrices. Cela signifie que si l'on change les signes de toutes les sources électromotrices (forces électromotrices et courants électromoteurs), cela a pour effet de changer les signes de tous les courants et de toutes les tensions.

Nous dirons qu'un réseau présente un plan d'antisymétrie lorsque ce plan est un plan de symétrie des connexions mais que les éléments électromoteurs associés dans cette symétrie ont des signes opposés.

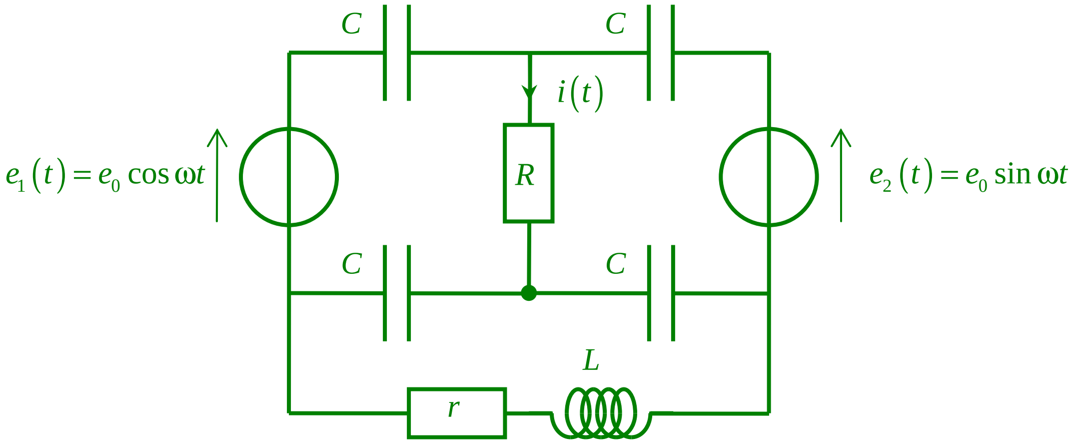
Nous en déduisons immédiatement que les courants dans des branches antisymétriques sont opposés. Nous en déduisons également que le courant dans une branche appartenant au plan d'antisymétrie est égal à son opposé et, par conséquent, nul.

Remarque : changer le signe d'une fonction sinusoïdale revient à incrémenter sa phase de la valeur π.

Théorème de superposition

Dans un réseau linéaire, chaque courant, chaque tension, peut être obtenu par superposition de solutions partielles correspondant à des valeurs partielles des sources électromotrices à la seule condition que la somme algébrique de ces valeurs partielles corresponde aux valeurs des sources électromotrices du problème initial.

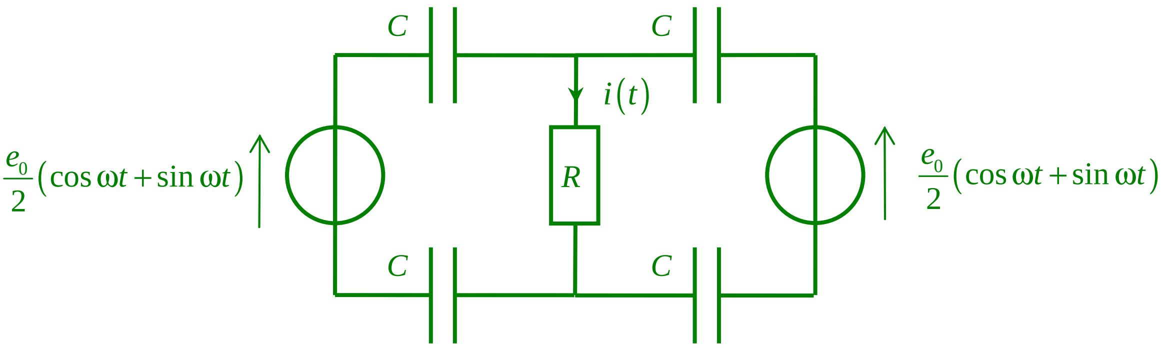
Exemple : on souhaite connaître le courant $i(t)$ dans la résistance R du circuit suivant.



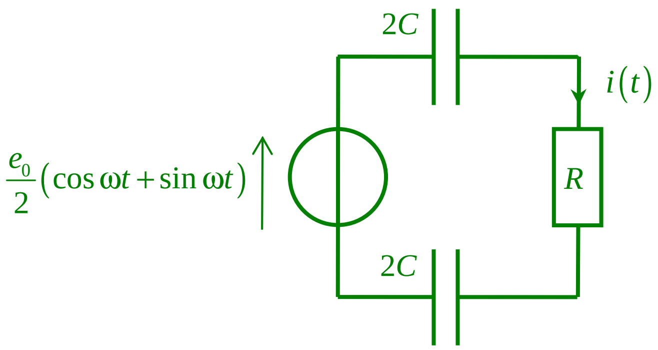
Si ce n'étaient les valeurs différentes des fonctions $e_1(t)$ et $e_2(t)$, le problème serait symétrique. Nous pouvons analyser ce circuit comme une superposition de deux circuits l'un symétrique et l'autre antisymétrique :

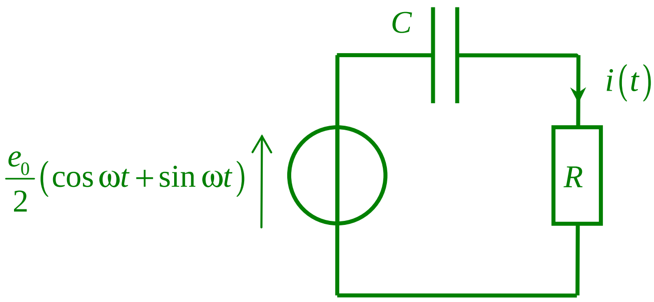
$$\left[e_1(t),\,e_2(t)\right]=\underbrace{\left[\frac{e_1(t)+e_2(t)}{2},\,\frac{e_1(t)+e_2(t)}{2}\right]}_{\text{symétrique}}+\underbrace{\left[\frac{e_1(t)-e_2(t)}{2},\,-\frac{e_1(t)-e_2(t)}{2}\right]}_{\text{antisymétrique}}$$

Le circuit antisymétrique ne produit aucun courant dans la résistance R qui se trouve dans le plan d'antisymétrie. Le circuit symétrique quand à lui ne produit aucun courant dans la branche comprenant la bobine : nous pouvons donc supprimer cette branche et affirmer que le courant dans la résistance est le même dans le circuit initial et dans le circuit suivant :



Pour ce circuit symétrique, nous ne changeons pas la valeur du courant $i(t)$ en le repliant selon son axe de symétrie, joignant ainsi les points équipotentiels. Deux générateurs idéaux de tension identiques en parallèle étant équivalent à un seul et deux condensateurs de capacité C en parallèle étant équivalent à un condensateur de capacité $2C$, nous obtenons les schémas équivalents suivant :





L'amplitude complexe $\underline{i}_{\mathrm{m}}$ du courant $i(t)$ est donc égale à l'amplitude complexe $\frac{e_0}{2}(1-j)=\frac{e_0}{\sqrt{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ du générateur de tension divisée par l'impédance résultante $R+\frac{1}{jC\omega}$.

$$\underline{i}_{\mathrm{m}}=\frac{e_0}{\sqrt{2}}\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{R+\frac{1}{jC\omega}}$$

Nous en déduisons l'expression de l'amplitude $i_{\mathrm{m}}=\left|\underline{i}_{\mathrm{m}}\right|$ et de la phase $\varphi_i=\arg\left(\underline{i}_{\mathrm{m}}\right)$:

$$i_{\mathrm{m}}=\frac{e_0}{\sqrt{2\left(R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}\right)}} \quad \text{et} \quad \varphi_i=-\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{RC\omega}$$

Ce qui signifie, au terme de ces calculs :

$$i(t)=\frac{e_0}{\sqrt{2\left(R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}\right)}}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{1}{RC\omega}\right)$$

4.4. Puissance en régime sinusoïdal

Attention ! Dès lors que l'on aborde les questions d'énergie ou de puissance, l'usage du calcul symbolique doit s'accompagner de la plus grande prudence. Les grandeurs énergétiques sont des formes quadratiques des tensions ou des courants et les formes quadratiques ne sont pas des applications linéaires : il ne saurait donc être question de parler d'une amplitude complexe associée à une puissance ou à une énergie.

Puissance instantanée, puissance moyenne

La *puissance instantanée* reçue par un dipôle a pour expression en régime quasi stationnaire :

$$p(t)=u(t)\,i(t)$$

Le *travail électrique* reçu algébriquement sur une durée $\Delta t=t_2-t_1$ par un dispositif électrique quelconque a pour expression :

$$W=\int_{t_1}^{t_2}p(t)\,\delta t$$

La *puissance moyenne* reçue par un dipôle traversé par un courant alternatif, ou puissance active, est la valeur moyenne de sa puissance instantanée, sur une période de ce signal :

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\delta t=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,i(t)\,\delta t$$

Puissance reçue par un dipôle en régime sinusoïdal

Puissance reçue par une résistance

Considérons une résistance R, traversée par un courant alternatif sinusoïdal $i_R(t) = I\sqrt{2}\cos\omega t$. La puissance instantanée reçue par cette résistance a pour expression :

$$p_R(t) = Ri_R^2(t) = R\left(I\sqrt{2}\cos\omega t\right)^2 = 2RI^2(\cos\omega t)^2 = RI^2(1+\cos 2\omega t)$$

Cette fonction $p_R(t)$ est un signal de fréquence deux fois plus élevée que celle du courant lui-même. La puissance reçue est toujours positive : la résistance est un dipôle purement dissipatif.

La puissance moyenne, ou puissance active, a pour expression :

$$\boxed{P = R\,I^2}$$

Remarque : la *valeur efficace* d'un courant traversant une résistance correspond à la norme du courant continu qui circulerait dans la même résistance en y produisant le même effet thermique sur un nombre entier de périodes.

Puissance reçue par un condensateur

Considérons un condensateur de capacité C ayant pour tension à ses bornes $u_C(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$. Ce condensateur est traversé par un courant d'intensité $i_C(t)$ en *quadrature avance* sur la tension :

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = -CU\omega\sqrt{2}\sin\omega t = I\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avec} \quad I = CU\omega$$

La puissance instantanée $p_C(t) = u_C(t)\,i_C(t)$ est alors une fonction sinusoïdale dont la fréquence est le double de la fréquence du courant et de la tension :

$$p_C(t) = -2C\omega U^2\sin\omega t\cos\omega t = -C\omega U^2\sin 2\omega t = -UI\sin 2\omega t$$

La puissance moyenne reçue par ce dipôle est évidemment nulle : $P = -UI\,\frac{1}{T}\int_0^T \sin 2\omega t\,dt = 0$

En régime forcé, la puissance instantanée reçue par un condensateur varie de façon sinusoïdale et la puissance active est nulle.

Enfin, l'énergie électrique emmagasinée dans le condensateur soumis à la tension $u_C(t)$ a pour expression $U_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t) = \frac{1}{2}CU^2(1+\cos 2\omega t)$. Cette énergie est une fonction oscillante du temps dont la valeur moyenne a pour valeur :

$$\langle U_C(t)\rangle = \frac{1}{2}CU^2$$

Puissance reçue par une bobine

Considérons une bobine d'inductance L ayant pour tension à ses bornes $u_L(t) = U\sqrt{2}\cos\omega t$. Ce condensateur est traversé par un courant d'intensité $i_L(t)$ en *quadrature retard* sur la tension :

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int u_L(t)\,dt=\frac{U}{L\omega}\sqrt{2}\sin\omega t=I\sqrt{2}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\quad \text{avec}\quad I=\frac{U}{L\omega}$$

La puissance instantanée reçue par la bobine est alors $p_L(t)=UI\sin 2\omega t$. Comme dans le cas du condensateur, il s'agit d'une fonction sinusoïdale dont la fréquence est le double de la fréquence du courant et de la tension. La puissance moyenne, ou puissance active, reçue par une bobine idéale est donc nulle.

Enfin, l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine traversée par le courant $i_L(t)$ a pour expression $U_L(t)=\frac{1}{2}Li_L^2(t)=\frac{1}{2}LI^2(1-\cos 2\omega t)$. Cette énergie est une fonction oscillante du temps dont la valeur moyenne a pour valeur :

$$\langle U_L(t)\rangle=\frac{1}{2}LI^2$$

Remarque : $p(t)$ étant tantôt négatif, tantôt positif, la bobine, comme le condensateur, se comporte successivement comme un générateur et comme un récepteur d'énergie, même si le bilan énergétique sur une période reste nul.

Puissance reçue par un dipôle quelconque

Considérons un dipôle linéaire quelconque soumis à une tension $u(t)=U\sqrt{2}\cos\omega t$ et parcouru par une intensité $i(t)=I\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi)$ présentant une avance de phase φ quelconque sur la tension.

La puissance instantanée reçue par ce dipôle a pour expression : $p(t)=2UI\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)$

Cette puissance instantanée est la somme d'un terme constant et d'un terme sinusoïdal oscillant à une fréquence double de la fréquence de la tension et du courant :

$$p(t)=UI\cos\varphi+UI\cos(2\omega t+\varphi)$$

La puissance moyenne est donc égale à ce terme constant : $P=UI\cos\varphi$

Si l'on considère l'impédance complexe du dipôle, en notant R la partie réelle : $Z=R+jX$, nous avons $|Z|=\frac{U}{I}$ et $\cos\varphi=\frac{R}{|Z|}$. Nous en déduisons une deuxième expression de la puissance active :

$$\boxed{P=UI\cos\varphi=RI^2}$$

Attention ! *U* et *I* sont les valeurs efficaces de la tension et du courant, et non pas les amplitudes.

Adaptation de puissance

On considère un générateur alternatif sinusoïdal de f.é.m. efficace E d'impédance interne Z_g. Ce générateur alimente une impédance de charge ajustable Z. On souhaite obtenir une puissance maximale dans l'impédance de charge.

En posant $Z_g = R_g + jX_g$ et $Z = R + jX$, la puissance dissipée dans la charge a pour expression :

$$P = RI^2 = R\frac{E^2}{\left|Z_g + Z\right|^2} = R\frac{E^2}{\left(R_g + R\right)^2 + \left(X_g + X\right)^2}$$

P est donc une fonction de deux variables *R* et *X* que l'on souhaite maximiser. Comme une partie réactive peut être négative, on choisira X égal à l'opposé de X_g pour annuler le deuxième terme au dénominateur.

La puissance P est alors égale à : $P\left(R\right) = R\dfrac{E^2}{\left(R_g + R\right)^2}$

La dérivée de *P* par rapport à *R* s'annule pour *R* égal à R_g et cela correspond à un maximum. Finalement, la puissance dans la charge sera maximale pour une impédance de valeur égale au conjugué de l'impédance interne du générateur, soit :

$$Z = Z_g^* = R_g - jX_g$$

Puissance apparente, facteur de puissance

Puissance apparente

La *puissance apparente* aux bornes d'un dipôle est le produit de la tension efficace par le courant efficace. Elle s'exprime en voltampères (symbole VA) et elle est notée S ou P_s.

Elle est toujours supérieure à la puissance réelle. C'est parfois elle qui figure sur les appareils de puissance. Cette indication est intéressante pour des dispositifs tels que des transformateurs amenés à travailler sous des déphasages courant-tension divers. En effet, pour des déphasages importants, le courant correspondant à un couple donné (puissance, tension d'alimentation) est plus important que sous un déphasage plus faible et les bobinages s'échauffent par effet Joule. Il y a une intensité limite à ne pas dépasser. Aussi donne-t-on la puissance apparente. La puissance réelle autorisée est fonction du déphasage selon l'expression :

$$P = P_s \cos\varphi$$

Remarque : cette nouvelle puissance n'a pas une réalité physique aussi concrète que la puissance active. Nous utiliserons souvent la puissance apparente en électronique de puissance et en électrotechnique (science des machines).

Facteur de puissance

Le facteur de puissance noté λ est le rapport de la puissance active sur la puissance apparente. Dans le cas particulier de courants sinusoïdaux, la puissance active vaut $UI\cos\varphi$, U et *I* étant respectivement les tension et courant efficaces, le facteur de puissance est alors égal à $\cos\varphi$.

Considérons une installation électrique industrielle consommant une certaine puissance *P* et un courant efficace *I*, sous une tension efficace *U*. Elle est alimentée par une longue ligne électrique de résistance *r*.

La puissance dissipée du fait des pertes par effet Joule dans la ligne électrique est égale à $r\,I^2$. Cette puissance est perdue et c'est l'intérêt du distributeur d'électricité que cette perte soit la plus petite possible. On a :

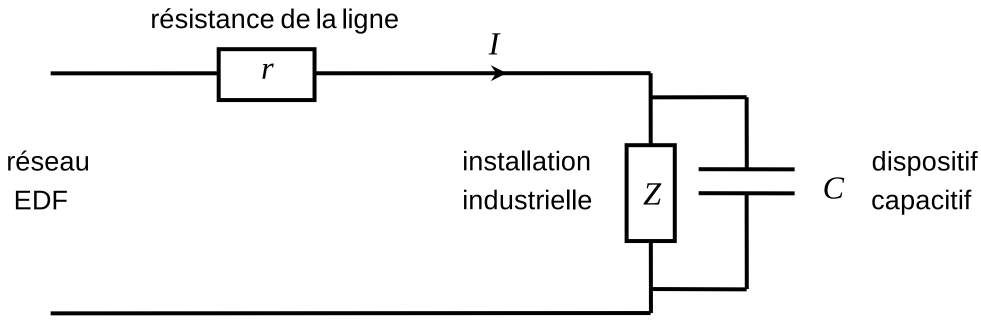
$$P_J = r\,I^2 = r\left(\frac{P}{U\cos\varphi}\right)^2 \qquad \text{si} \qquad U = constante$$

On constate que le nombre de paramètres qu'il est possible de contrôler se limite à deux : la tension U et le déphasage (la puissance P est imposée par l'industriel et la résistance r par des contraintes techniques et économiques sur les lignes).

Pour élever la tension U, on peut avoir recours à des lignes à haute tension.

En ce qui concerne le $\cos\varphi$, les installations industrielles utilisent souvent des moteurs ou des dispositifs présentant des bobinages d'impédance $Z = R + jX$ de type inductif $\left(X > 0\right)$.

L'idée est donc d'ajouter des capacités en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance et le ramener à une valeur proche de l'unité.



L'idéal est que l'admittance résultante $Y_r = jC\omega + \dfrac{1}{R + jX}$ soit réelle, ce qui conduit à la condition $X = |Z|\sin\varphi = C\omega|Z|^2$.

En fonction de la puissance $P = UI\cos\varphi$ consommée par l'installation et de la tension U, cette condition s'écrit :

$$C = \frac{P\tan\varphi}{\omega U^2}$$