ÉLECTROSTATIQUE

Chapitre 2

Potentiel électrostatique

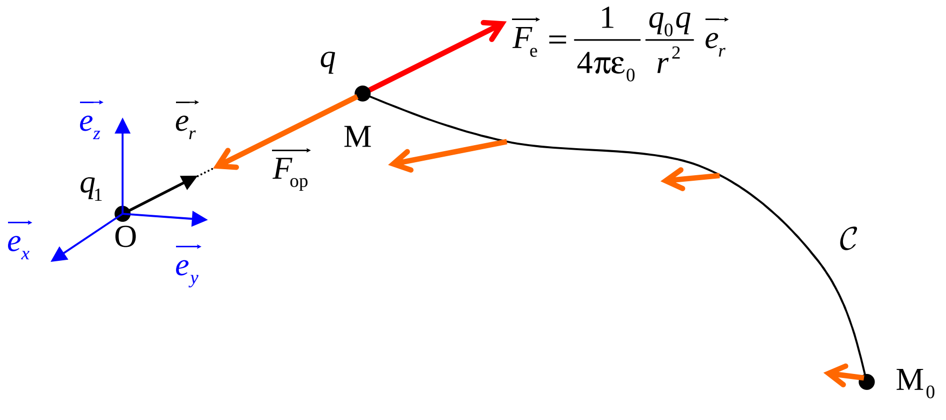
2.1. Définition du potentiel

Énergie potentielle électrostatique

Énergie potentielle d'interaction de deux charges électriques

La force de Coulomb, force d'interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles est une force centrale en $1/r^2$ et dérive donc d'une énergie potentielle, à l'instar de la force d'interaction gravitationnelle entre deux masses ponctuelles.

Rappelons ce que cela signifie : plaçons une charge q_0 immobile au point origine d'un référentiel galiléen et calculons le travail quasi statique que doit exercer un opérateur pour amener en un point M une charge q initialement située en un point M_0.



Le travail élémentaire est égal, par définition, à la circulation élémentaire de la force. Avec $\overrightarrow{F_\mathrm{op}} = -\overrightarrow{F_\mathrm{e}}$, cela s'écrit :

$$\delta W_\mathrm{op} = \overrightarrow{F_\mathrm{op}} \cdot \overrightarrow{dr} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}\overrightarrow{e_r} \cdot \overrightarrow{dr} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q\, dr}{r^2} = d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r}\right)$$

Le travail que doit exercer l'opérateur pour amener, depuis une distance infinie, la charge q à distance finie de la charge q_0 a donc pour expression :

$$W_\mathrm{op} = \int_{\widehat{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}} \overrightarrow{F_\mathrm{op}} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_{r_0}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q\, dr}{r^2} = \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r}\right]_{r_0}^{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r_0}$$

Ce travail est indépendant du parcours particulier $\mathcal{C}=\overset{\frown}{\mathrm{M_0M}}$ suivi par la charge q : il ne dépend que du point origine M_0 et du point d'aboutissement M.

Nous appelons « énergie potentielle électrostatique du système de deux charges q_0 et q » la fonction :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e}}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r}+C^{te}$$

Le choix de la constante nous appartient, mais l'on privilégiera, chaque fois que cela sera possible, de prendre la constante nulle, choisissant ainsi de considérer l'énergie potentielle nulle à l'infini.

Le travail W_{op} fourni par l'opérateur s'exprime alors comme la variation de l'énergie potentielle électrostatique du système de charge :

$$W_{\mathrm{op}}=\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{e}}=\mathcal{E}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M})-\mathcal{E}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M}_0)$$

Énergie potentielle d'une charge dans un système de charges

Considérons un système de n charges électriques ponctuelles q_1, q_2, $\cdots$, q_n placées en des positions fixes P_1, P_2, $\cdots$, P_n dans un référentiel galiléen. On appelle énergie potentielle d'une charge q dans ce système de charges la somme des énergies potentielles d'interaction de la charge q avec chacune des charges q_i :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mathrm{MP}_i}$$

Si nous avons affaire à une distribution continue de charges volumique, surfacique ou linéique, la sommation sera exprimée non plus sous forme discrète, mais sous forme intégrale :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathrm{P}\in\tau}\frac{\rho(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}}\delta\tau \qquad \mathcal{E}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\mathrm{P}\in S}\frac{\sigma(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}}\delta S \qquad \mathcal{E}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathrm{P}\in\ell}\frac{\lambda(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}}\delta\ell$$

Potentiel électrostatique

Définition

Si l'on place en un point M de l'espace une charge électrique q, l'énergie potentielle d'interaction de cette charge avec l'ensemble des autres charges présentes est proportionnelle à la charge q.

L'énergie potentielle électrique divisée par la charge q est indépendante de la charge d'essai et définit une caractéristique électrique en M que l'on appelle *potentiel électrostatique* en ce point de l'espace :

$$V(\mathrm{M})=\frac{\mathcal{E}_{\mathrm{e}}(\mathrm{M})}{q}$$

Des expressions démontrées de l'énergie potentielle électrique, nous déduisons l'expression du potentiel dans les différent cas de distribution de charge :

$$V(\mathrm{M})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{\mathrm{OM}}+C^{te}$$ dans le cas d'une charge unique q_0 placée en O

$$V(\mathrm{M})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\mathrm{MP}_i}+C^{te}$$ dans le cas d'un ensemble de charges discrètes q_i placées en P_i

$V(\mathrm{M}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint_{\mathrm{P}\in\tau} \dfrac{\rho(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}}\delta\tau + C^{te}$ dans le cas d'une distribution volumique continue de charge

$V(\mathrm{M}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iint_{\mathrm{P}\in S} \dfrac{\sigma(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}}\delta S + C^{te}$ dans le cas d'une distribution surfacique continue de charge

$V(\mathrm{M}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{\mathrm{P}\in\ell} \dfrac{\lambda(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}}\delta\ell + C^{te}$ dans le cas d'une distribution linéique continue de charge

Linéarité

De façon générale, le potentiel électrostatique en un point de l'espace est la somme de contributions des différentes charges présentes. Nous pouvons très bien envisager une distribution de charge constituée à la fois de charges discrètes et de charges continues.

Remarque : dans certains « problèmes d'école », il peut exister des charges électriques à l'infini et cela interdit de choisir le potentiel électrique nul à l'infini. Sauf dans ces cas particulier, nous choisirons le potentiel nul à l'infini, ce qui revient à choisir une constante nulle dans les expressions ci-dessus.

Attention ! Cette définition de l'énergie et du potentiel électrostatique suppose que toutes les charges électriques soient **immobiles dans un référentiel galiléen**. Une autre définition du potentiel scalaire électrique sera donnée dans le cadre plus général de l'électromagnétisme. Toutefois, le potentiel scalaire électrique défini dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires coïncide avec la définition électrostatique : dans le cadre de l'ARQS, les vitesses des charges électriques sont très petites par rapport à la vitesse de la lumière.

Relation entre potentiel et champ électrique, opérateur gradient

Circulation du champ électrique

De la même façon que le potentiel électrique est défini comme énergie potentielle par unité de charge, le champ électrique était défini comme force par unité de charge. Il existe donc les mêmes relations entre le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le potentiel électrique V qu'entre la force électrique $\overrightarrow{F_\mathrm{e}}$ et l'énergie potentielle électrique $\mathcal{E}_\mathrm{e}$.

En particulier, la relation de définition de la différentielle de l'énergie potentielle comme l'opposé de la circulation élémentaire de la force devient, en divisant par la charge, la relation de définition de la différentielle du potentiel comme opposé de la circulation du champ électrique :

$$d\mathcal{E}_\mathrm{e} = -\overrightarrow{F_\mathrm{e}} \cdot \overrightarrow{dr} \qquad \Rightarrow \qquad dV = -\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Le potentiel en un point M quelconque de l'espace est donc défini comme la circulation du champ électrique entre un point particulier M_0 (qui peut être rejeté à l'infini) et M :

$$V(\mathrm{M}) = -\int_{\widehat{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Opérateur gradient

Le potentiel électrostatique est une fonction de point, c'est-à-dire une fonction des trois variables scalaires que sont les coordonnées cartésiennes du point : $V(\mathrm{M}) = V(x,\ y,\ z)$.

La différentielle d'une telle fonction a pour expression : $dV = \dfrac{\partial V}{\partial x}dx + \dfrac{\partial V}{\partial y}dy + \dfrac{\partial V}{\partial z}dz$

En coordonnées cartésiennes, nous pouvons développer la circulation élémentaire du champ électrique comme un produit scalaire : $\vec{E}\cdot\vec{dr} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$

Chaque composante du champ électrique s'identifie donc à l'opposé de la dérivée partielle du potentiel par rapport à la même coordonnée :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Ces relations scalaires définissent l'opérateur vectoriel « gradient » que nous noterons :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad\qquad \overrightarrow{\text{grad}} = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Remarque : d'autres notations sont souvent utilisées pour cet opérateur de dérivation vectorielle. En particulier, la notation $\vec{\nabla}$ (lire : « nabla ») est systématique dans les pays anglo-saxons. La notation $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$, moins fréquemment utilisée, est pourtant très mnémotechnique.

Exemples de fonctions gradient :

● Nous avons déjà calculé le gradient de la fonction $\frac{1}{r}$: $\overrightarrow{\text{grad}}\frac{1}{r} = -\frac{\vec{e}_r}{r^2}$

Application : le potentiel coulombien $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ est associé au champ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r$

● Exprimons, plus généralement, le gradient d'une fonction scalaire isotrope $f(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(r)\right) = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{df}{dr} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}\frac{df}{dr} = \frac{x}{r}\frac{df}{dr}$$. Nous en déduisons : $\overrightarrow{\text{grad}}\left(f(r)\right) = \frac{df}{dr}\vec{e}_r$

● Gradient de la fonction scalaire $\vec{k}\cdot\vec{r}$ où $\vec{k}$ est un vecteur constant :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x x + k_y y + k_z z\right) = k_x$$. Nous en déduisons : $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right) = \vec{k}$

Application : le potentiel coulombien $V = -\vec{E}\cdot\vec{r}$ est associé au champ constant $\vec{E}$

● Gradient de la fonction scalaire $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ où $\vec{k}$ est un vecteur constant :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}\right) = k_x\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$. Nous en déduisons : $\overrightarrow{\text{grad}}\left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right) = \vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

● Quel est le gradient d'un produit de fonctions scalaires ?

$$\frac{\partial}{\partial x}(f\times g) = \frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}$$. Nous en déduisons : $\overrightarrow{\text{grad}}(f\times g) = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right)g + f\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,g\right)$

Note : le gradient peut être exprimé dans d'autres systèmes de coordonnées que les coordonnées cartésiennes. Les expressions ci-dessous n'ont pas à être mémorisées, en cas de besoin elles seront fournies. Il est indispensable toutefois d'en comprendre la signification.

En coordonnées cylindriques $(\rho,\ \varphi,\ z)$: $E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho}$ $E_\varphi = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$ et $E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}$

En coordonnées sphériques $(r,\ \theta,\ \varphi)$: $E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$ $E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$ et $E_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$

Équation de Poisson

Nous avons déjà démontré la relation $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ correspondant à l'expression locale du théorème de Gauss. Cette relation peut être exprimée relativement à la fonction potentiel sous la forme $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V\right) = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

L'opérateur scalaire $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\right) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ s'appelle *opérateur laplacien* et est noté le plus souvent Δ, parfois $\vec{\nabla}^2$.

Le potentiel électrostatique V obéit en tout point de l'espace à l'équation de Poisson :

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Note : le laplacien peut être exprimé en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques. Les expressions ci-dessous n'ont évidemment pas à être mémorisées.

En coordonnées cylindriques $(\rho,\ \varphi,\ z)$: $\Delta V = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\dfrac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

En coordonnées sphériques $(r,\ \theta,\ \varphi)$: $\Delta V = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2(\sin\theta)^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$

Nous serons rarement amenés à résoudre directement l'équation de Poisson. Rappelons-nous cependant que nous en connaissons une solution de la forme :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathrm{P}\in\tau}\frac{\rho(\mathrm{P})}{\mathrm{MP}}\delta\tau$$

Équation de Laplace

Dans des régions de l'espace où la densité volumique de charge ρ est nulle, l'équation de Poisson s'écrit :

$$\Delta V = 0$$

Cette équation s'appelle alors « équation de Laplace ». Nous saurons assez facilement exprimer des solutions particulières de cette équation dans le cas de problèmes à très haut degré de symétrie.

En particulier, dans un prochain chapitre, nous chercherons des solutions de l'équation de Laplace à laquelle satisfait le potentiel dans l'espace vide entre des conducteurs en équilibre électrostatique.

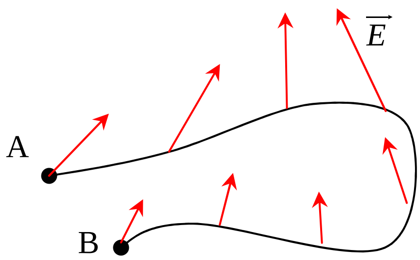
Remarque : nous rencontrerons également l'équation de Poisson lors de l'étude de la conduction thermique. Dans certaines conditions de linéarité des milieux conducteurs thermiques, la température doit satisfaire à l'équation de Laplace dans les espaces séparant les sources de chaleur.

2.2. Circulation du champ électrostatique

Le champ électrostatique est à circulation conservative

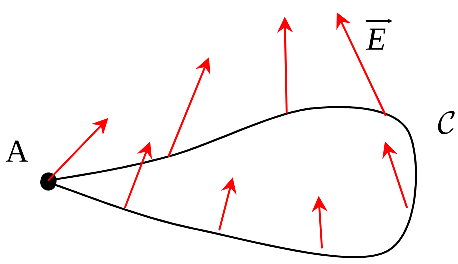
Dire que le champ électrostatique dérive d'un potentiel revient à dire que la circulation du champ électrique sur un parcours fermé est nulle. Cette propriété s'exprime habituellement par cette expression : « le champ électrostatique est à circulation conservative »

Quel que soit le parcours $\mathcal{C}$ fermé : $$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\vec{dr} = 0$$



$$\int_{\widehat{AB}} \vec{E}\cdot\vec{dr} = V(A) - V(B)$$

Circuit ouvert



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\vec{dr} = 0$$

Circuit fermé

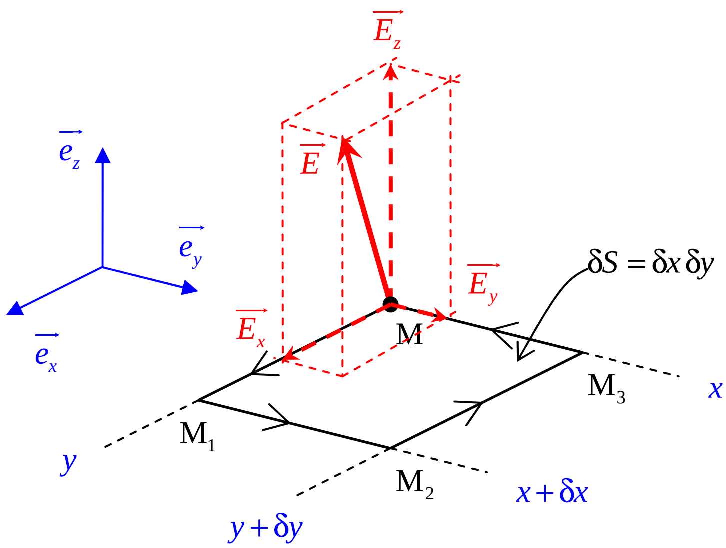
Attention ! Cette propriété du champ électrique n'est vraie qu'en **électrostatique** dans un référentiel galiléen. Dans le cadre le plus général de l'électromagnétisme, le champ électrique fonction du temps n'est pas à circulation conservative, y compris dans le cas particulier de l'approximation des régimes quasi stationnaires.

Opérateur rotationnel, théorème de Stokes

Densité surfacique de circulation

Considérons un champ de vecteurs quelconque $\vec{E}$ et une direction quelconque de l'espace que nous choisissons comme axe Oz d'un référentiel cartésien orthonormé $(O,\ x,\ y,\ z)$

Autour d'un point M quelconque, de coordonnées cartésiennes $(x,\ y,\ z)$, on envisage un parcours élémentaire rectangulaire dans un plan orthogonal à Oz, de largeur δx et de longueur δy, orienté dans le sens de rotation positif autour de Oz.



Exprimons la circulation élémentaire $\delta\Gamma_z$ du champ $\vec{E}(x, y, z)$ sur ce parcours. Cette circulation se décompose en quatre contributions que l'on va associer par paires parallèles :

$$\delta\Gamma_z = E_x(\langle x\rangle, y, z)\delta x + E_y(x+\delta x, \langle y\rangle, z)\delta y + E_x(\langle x\rangle, y+\delta y, z)(-\delta x) + E_y(x, \langle y\rangle, z)(-\delta y)$$

$$\left(\frac{E_y(x+\delta x, \langle y\rangle, z) - E_y(x, \langle y\rangle, z)}{\delta x} - \frac{E_x(\langle x\rangle, y+\delta y, z) - E_x(\langle x\rangle, y, z)}{\delta y}\right)\delta x\,\delta y$$

Quand δx et δy tendent vers zéro, nous reconnaissons l'expression de dérivées partielles de composantes du champ. Dans cette limite, nous pouvons écrire :

$$\delta\Gamma_z = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\delta S$$

La quantité algébrique $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$ représente au point M la densité surfacique de circulation $\frac{\delta\Gamma_z}{\delta S}$ autour de la direction $\vec{e_z}$.

Définition du rotationnel d'un champ de vecteur

Nous définissons le *rotationnel* du champ de vecteur $\vec{E}$, noté $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}$, le vecteur ayant en chaque point de l'espace, une composante pour chaque direction de l'espace égale à la densité surfacique de circulation autour de cette direction. En coordonnées cartésiennes, cela s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e_x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e_y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e_z}$$

Remarque importante : la notation « nabla » trouve ici toute sa valeur symbolique. En effet, **le rotationnel d'un champ de vecteur s'exprime comme le produit vectoriel symbolique de l'opérateur nabla par le champ de vecteur**. Cette méthode mnémotechnique mérite d'être retenue. Encore faut-il déjà savoir exprimer un produit vectoriel sans hésitation !

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & E_x & \vec{e_x}\\ \frac{\partial}{\partial y} & E_y & \vec{e_y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & E_z & \vec{e_z}\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\end{bmatrix}$$

Note : le rotationnel peut aussi être exprimé en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques. Les expressions ci-dessous n'ont évidemment pas à être mémorisées.

En coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) :

$$\text{rot}\,\vec{E} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)\vec{e_\varphi} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e_z}$$

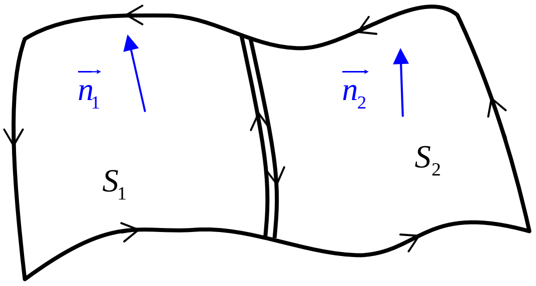
En coordonnées sphériques (r, θ, φ) :

$$\text{rot}\,\vec{E} = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(E_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right)\vec{e_\varphi}$$

Théorème de Stokes

Le circulation orientée est une grandeur extensive : si l'on considère deux surfaces ouvertes S_1 et S_2 adjacentes (c'est-à-dire ayant une partie de contour commun) et orientées par continuité, la circulation orientée sur le contour de la surface somme $S = S_1 \oplus S_2$ est égale à la somme des circulations orientées sur les contours des surfaces S_1 et S_2.

En effet, la circulation le long la courbe frontière entre les surfaces S_1 et S_2 est comptée deux fois avec des valeurs algébriques opposées.



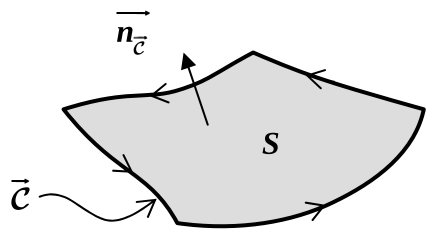
$$\Gamma_{S_1 \oplus S_2} = \Gamma_{S_1} + \Gamma_{S_2}$$

Cette propriété se généralise sous la forme intégrale du théorème de Stokes :

Théorème de Stokes

La circulation d'un champ de vecteur le long d'une courbe fermée orientée est égale au flux du rotationnel de ce champ de vecteur à travers une surface s'appuyant sur cette courbe. La surface doit être orientée conformément à l'orientation de la courbe.

$$\oint_{\vec{\mathcal{C}}} \vec{E} \cdot \vec{\delta \ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} \cdot \vec{n_{\vec{\mathcal{C}}}}\, \delta S$$



Équation locale

Cela revient au même de dire que le champ électrostatique dérive d'un potentiel que de dire que la circulation de celui-ci sur un parcours fermé est nulle, ou encore, expression équivalente, que le champ électrostatique est à « circulation conservative ».

Il s'ensuit une propriété géométrique générale des champs électrostatiques : les lignes de champ, orientées par le champ, prenant naissance sur les charges positives et aboutissant aux charges négatives, ne peuvent en aucun cas se refermer sur elles-mêmes.

Cette propriété s'exprime localement par l'affirmation qu'en tout point de l'espace, le rotationnel d'un champ électrostatique est nul. Ceci est une simple conséquence du théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{\delta \ell} = 0 \quad \forall \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} \cdot \vec{n}\, \delta S = 0 \quad \forall S$$

Cette dernière proposition ne peut être vérifiée quelle que soit la surface S que dans l'hypothèse où le rotationnel du champ est nul en tout point de l'espace :

En **électrostatique**, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$

Attention ! Cette équation locale **n'est pas** une équation générale de l'électromagnétisme. Elle ne sera plus vérifiée dès lors que les charges seront en mouvement, même dans le cas particulier de l'approximation des régimes quasi stationnaires, et *a fortiori* dans le cas le plus général de l'électromagnétisme.

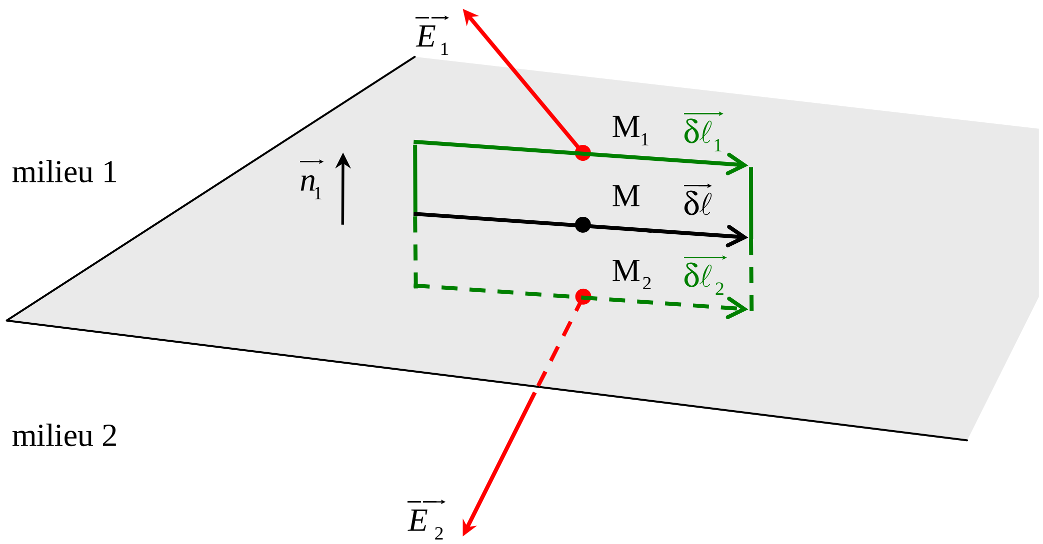
Continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la traversée d'une surface chargée

Considérons une surface chargée de densité surfacique σ et un segment élémentaire $\overrightarrow{\delta\ell}$ dans le voisinage d'un point M de cette surface que nous supposerons localement plane.

Construisons une courbe fermée autour du point M en imaginant un parcours rectangulaire « à cheval » sur la surface chargée comprenant les segments élémentaires $\overrightarrow{\delta\ell_1}$ et $\overrightarrow{\delta\ell_2}$ immédiatement voisines de $\overrightarrow{\delta\ell}$ dans le milieu 1 et dans le milieu 2. Dans la limite considérée, les segments orthogonaux à la surface chargée ont une mesure nulle et la circulation du champ électrique sur le parcours rectangulaire se réduit aux deux seules circulations élémentaires sur les segments $\overrightarrow{\delta\ell_1}$ et $\overrightarrow{\delta\ell_2}$.

En notant $\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$ les champs électriques dans les milieux 1 et 2 aux points M_1 et M_2 immédiatement voisins de M, la nature fondamentalement conservative de la circulation du champ électrique s'écrit :

$$\delta\Gamma = \vec{E_1}\cdot\overrightarrow{\delta\ell_1} - \vec{E_2}\cdot\overrightarrow{\delta\ell_2} = \left(\vec{E_1}-\vec{E_2}\right)\cdot\overrightarrow{\delta\ell} = 0$$



La relation $\left(\vec{E_1}-\vec{E_2}\right)\cdot\overrightarrow{\delta\ell} = 0$ doit être vérifiée quel que soit la direction du segment $\overrightarrow{\delta\ell}$, pourvu qu'il reste dans le plan chargé. Cela implique que la composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée d'une surface chargée.

Rappelons que ce n'est pas le cas de la composante normale du champ électrique qui obéit à la relation de discontinuité : $\left(\vec{E_1}-\vec{E_2}\right)\cdot\vec{n_1} = \sigma/\varepsilon_0$.

Nous en déduisons la relation plus générale, dite « relation de passage » du champ électrique à la traversée d'une surface chargée :

$$\boxed{\vec{E_1}-\vec{E_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n_1}}$$

2.3. Lignes de champ, surfaces équipotentielles

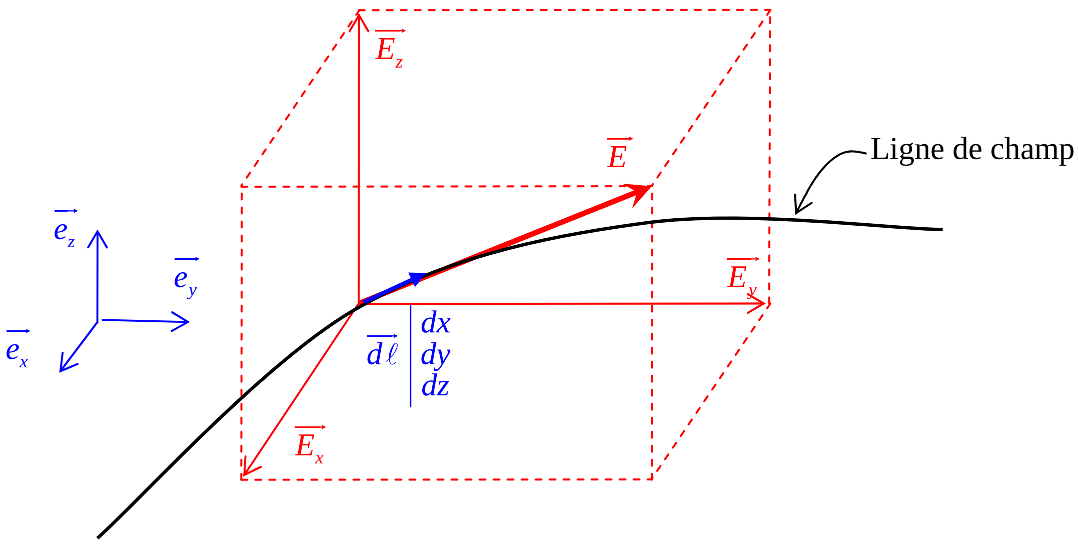
Lignes de champ

On appelle ligne de champ une courbe à laquelle le champ est en tout point tangent. Pour obtenir l'équation différentielle des lignes de champ, nous pouvons écrire la condition de colinéarité. Cette condition s'exprime, en coordonnées cartésiennes de la façon suivante :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Note : en coordonnées cylindriques et, respectivement sphériques, les équations différentielles s'écrivent :

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho\, d\varphi}{E_\varphi} = \frac{dz}{E_z} \quad \text{et, respectivement} \quad \frac{dr}{E_r} = \frac{r\, d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin\theta\, d\varphi}{E_\varphi}$$



Exemple : considérons un champ de vecteurs dont les composantes cartésiennes sont $E_x = \alpha x$, $E_y = -\alpha y$ et $E_z = 0$. Les lignes de champ sont données par l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{-\alpha y} \quad \text{soit} \quad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{d(xy)}{xy} = 0$$

Nous en déduisons par intégration : $xy = C^{te} = x_0 y_0$

Les lignes de champ sont, dans ce cas, des hyperboles équilatères.

Surfaces équipotentielles

On appelle « surface équipotentielle » un lieu de l'espace sur lequel le potentiel électrostatique a même valeur. Considérons un point M d'une telle surface et un déplacement élémentaire $\vec{dr}$ à partir de ce point. La variation du potentiel est égale, par définition, à l'opposé de la circulation du champ électrique :

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr}$$

Si l'on se déplace sur la surface équipotentielle, $dV = 0$, ce qui signifie que le déplacement $\vec{dr}$ est orthogonal au champ électrique. Ceci étant vrai quelle que soit la direction du déplacement dans le plan tangent en M à la surface équipotentielle, pourvu toutefois que ce plan tangent existe. Nous en déduisons que le champ électrique est orthogonal à la surface équipotentielle.

Propriété géométrique des lignes de champ

En électrostatique, les lignes de champ électriques sont orthogonales aux surfaces équipotentielles, sauf éventuellement en quelques points singuliers où le champ électrique est nul.

2.4. Énergie électrostatique.

Énergie d'un système discret de charges électriques

Doublet de charges

Nous avons déjà étudié l'énergie électrostatique d'un système de deux charges électriques q_1 et q_2, celle-ci a pour valeur :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + C^{te}$$

La constante peut être choisie nulle et l'on considère alors que l'énergie électrostatique est nulle lorsque les charges sont infiniment éloignées.

Cette expression peut aussi bien s'écrire sous cette autre forme, apparemment plus compliquée, dont nous démontrerons l'intérêt par sa possible généralisation à toute distribution de charge, discrète ou continue :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = \frac{1}{2}\left(q_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{12}} + q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(q_1 V_1 + q_2 V_2\right)$$

Ensemble de n charges

L'énergie électrostatique d'un système de n charges $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ est égale à la somme des énergies électrostatiques des paires de charges $\{q_i, q_j\}$. En écrivant, comme nous l'avons déjà fait pour deux charges, chaque produit $q_i\, q_j$ sous la forme $q_i\, q_j = \frac{1}{2}\left(q_i\, q_j + q_j\, q_i\right)$, cela s'écrit :

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}\right)$$

Dans la deuxième somme, nous reconnaissons le potentiel $V_i = V\left(\mathrm{M}_i\right)$ créé au point M_i où se trouve la charge q_i par l'ensemble des autres charges, c'est-à-dire toutes les charges sauf la charge q_i elle-même. Nous aboutissons ainsi à l'écriture de l'énergie potentielle sous la forme d'un ensemble de contributions dues à chaque charge :

$$\boxed{\mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\, V_i}$$

Énergie d'une distribution continue de charges électriques

Expression de l'énergie électrostatique en fonction du potentiel

Considérons une distribution volumique de charge $\rho\left(\mathrm{M}\right)$ confinée dans un volume fini τ. Nous excluons par conséquent l'existence éventuelle de charges à l'infini.

La sommation discrète doit alors être transformée en sommation intégrale des contributions élémentaires $\delta\mathcal{E}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\rho V\,\delta\tau$, soit :

$$\mathcal{E}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\iiint_{\mathrm{M}\in\tau} \rho(\mathrm{M})V(\mathrm{M})\delta\tau$$

Dans le cas d'une distribution surfacique ou linéique d'énergie, l'expression de l'énergie électrostatique s'écrit, avec les notations usuelles :

$$\mathcal{E}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\iint_{\mathrm{M}\in S} \sigma(\mathrm{M})V(\mathrm{M})\delta S \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}\in\mathcal{C}} \lambda(\mathrm{M})V(\mathrm{M})\delta\ell$$

Expression de l'énergie électrostatique en fonction du champ

Sans démonstration, nous admettrons l'expression de l'énergie électrostatique en fonction de la valeur du champ électrique en chaque point de l'espace :

$$\mathcal{E}_\mathrm{e} = \iiint_{\substack{\text{tout}\\ \text{l'espace}}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^{\,2}\,\delta\tau = \iiint_{\substack{\text{tout}\\ \text{l'espace}}} u_\mathrm{e}\,\delta\tau \qquad \text{avec} \qquad u_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^{\,2}$$

u_e est défini en chaque point de l'espace et s'appelle « *densité volumique d'énergie électrique* »

Attention ! Nous parlons bien ici de la même énergie électrostatique $\mathcal{E}_\mathrm{e}$ d'une distribution continue de charge que dans l'expression précédente en fonction des potentiels, mais le domaine d'intégration n'est pas le même. Dans la première expression, en fonction du potentiel, l'intégrale peut n'être étendue qu'à la seule région de l'espace contenant des charges, alors que dans le second cas, l'intégrale est étendue aux régions de l'espace où le champ électrique n'est pas nul.

Note : la démonstration de l'expression de la densité volumique d'énergie n'est pas exigible à ce niveau d'études. À titre de lecture, la voici, en quelques lignes de calcul.

Compte tenu de l'équation de Maxwell-Gauss $\rho = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E}$ et de la relation entre champ et potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, on démontre sans trop de difficulté l'identité suivante : $\rho V = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\left(V\vec{E}\right) + \varepsilon_0\,\vec{E}^{\,2}$.

Nous avons alors : $\mathcal{E}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho V\,\delta\tau = \underbrace{\frac{1}{2}\iiint_\tau \varepsilon_0\,\mathrm{div}\left(V\vec{E}\right)\delta\tau}_{\text{On démontre que ce terme est nul dans la limite où le domaine d'intégration } \tau \text{ s'étend à tout l'espace}} + \frac{1}{2}\iiint_\tau \varepsilon_0\,\vec{E}^{\,2}\,\delta\tau$

Selon le théorème de Green-Ostrogradski, nous pouvons écrire : $\iiint_\tau \mathrm{div}\left(V\vec{E}\right)\delta\tau = \oiint_S V\vec{E}\cdot\vec{n_\mathrm{ext}}\,dS$

Si les charges électriques sont confinées dans un volume fini, à grande distance le potentiel décroît au moins en $1/r$ et le module du champ décroît au moins en $1/r^2$. Le produit $V\left|\vec{E}\right|$ décroît donc au moins en $1/r^3$ et le flux du vecteur $V\vec{E}$ tend vers 0 lorsque le domaine d'intégration s'étend à tout l'espace.

2.5. Quelques exemples simples

Sphère uniformément chargée en volume

Considérons une sphère de rayon *R*, uniformément chargée en volume de charge totale $Q=\frac{4}{3}\pi R^3\rho$, centrée au point origine O d'un système de coordonnées sphériques $(r,\ \theta,\ \varphi)$.

Nous savons, *a priori*, que le potentiel *V* ainsi que la densité volumique d'énergie électrostatique u_e ne seront fonction que de la distance *r* au centre.

Du fait de cette symétrie, les lignes de champ forment un faisceau de droites passant par le point O (divergentes pour $Q>0$, convergentes pour $Q<0$) et les surfaces équipotentielles sont des sphères de centre O.

Expression du potentiel

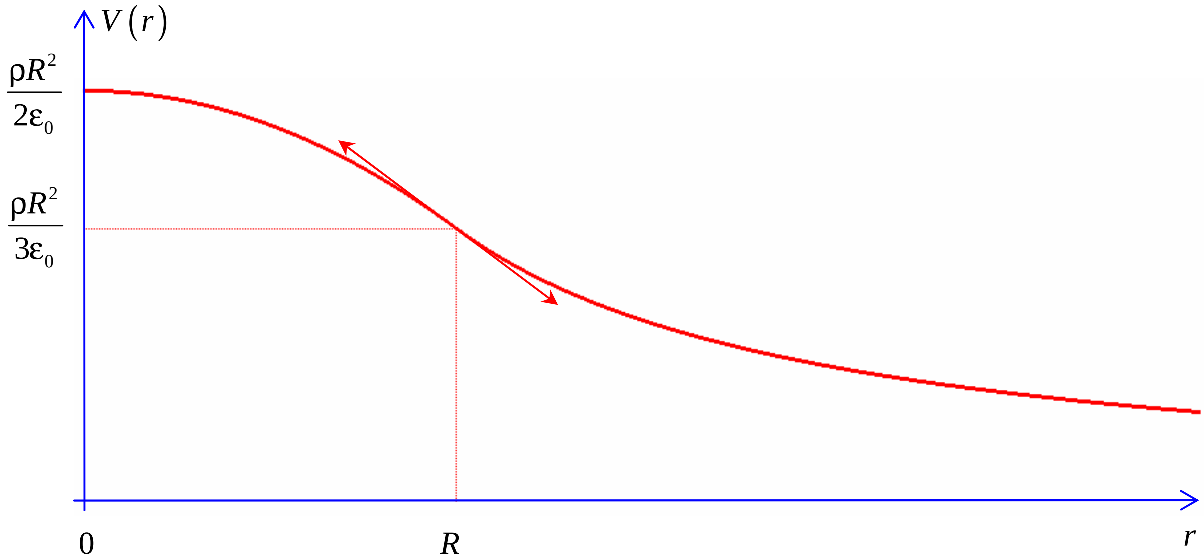
Nous avons déjà calculé le champ électrique en appliquant le théorème de Gauss dans cette situation de symétrie sphérique. Le potentiel $V(r)$ est obtenu par circulation radiale du champ électrique.

Faisant le choix d'un potentiel nul à l'infini, nous en déduisons que le potentiel est en $1/r$ à l'extérieur de la sphère, à l'instar du potentiel créé par une charge ponctuelle.

$$\text{pour } r>R,\quad \vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e_r}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{\vec{e_r}}{r^2}\quad \text{donc}\quad V(r)=-\int_\infty^r E_r(r')\,dr'=-\int_\infty^r \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\,\frac{dr'}{r'^2}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

Le potentiel doit être continu à la traversée de la surface de la sphère : $V(R)=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$. Cette condition nous permet d'obtenir l'expression du potentiel à l'intérieur de la sphère.

$$\text{pour } r<R,\quad \vec{E}=\frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,\vec{e_r}=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\vec{e_r}\quad \text{donc}\quad V(r)=V(R)-\int_R^r \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\,dr'=\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}-\left[\frac{\rho r'^2}{6\varepsilon_0}\right]_R^r=\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}$$



Remarque : le potentiel est parabolique pour $r<R$ et hyperbolique pour $r>R$. La fonction potentiel est continue et sa dérivée est continue, y compris en $r=R$ au point où la parabole et l'hyperbole se raboutent, ce qui signifie que le champ électrique est continu.

Énergie électrostatique : calcul à partir du potentiel

L'énergie électrostatique de la sphère chargée s'obtient en intégrant la quantité $\rho V/2$ sur tout le volume de la sphère, soit :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e}} = \iiint_{r<R} \frac{1}{2}\rho V\,\delta\tau = \int_0^R \frac{1}{2}\rho V(r)\times 4\pi r^2\,dr = \int_0^R \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\right)\times 4\pi r^2\,dr = \frac{4\pi}{15}\frac{\rho^2 R^5}{\varepsilon_0}$$

Attention ! Le calcul ne peut être mené de cette façon qu'en ayant fait le choix d'un potentiel nul à l'infini !

Énergie électrostatique : calcul à partir du champ

L'énergie électrostatique de la sphère chargée s'obtient en intégrant la densité volumique d'énergie électrostatique $u_{\mathrm{e}} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2$ sur toute région de l'espace où le champ n'est pas nul, c'est-à-dire ici sur tout l'espace.

Cette énergie se décompose en deux contributions : l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_{\mathrm{e\,int}}$ intérieure à la sphère, d'une part, et l'énergie électrostatique $\mathcal{E}_{\mathrm{e\,ext}}$ extérieure à la sphère, d'autre part : $\mathcal{E}_{\mathrm{e}} = \mathcal{E}_{\mathrm{e\,int}} + \mathcal{E}_{\mathrm{e\,ext}}$

Calculons tout d'abord l'énergie intérieure :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e\,int}} = \iiint_{r<R} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2\,\delta\tau = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_r^2 \times 4\pi r^2\,dr = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 \times 4\pi r^2\,dr = \frac{2\pi}{45}\frac{\rho^2 R^5}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{10R}$$

puis l'énergie extérieure :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e\,ext}} = \iiint_{r>R} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2\,\delta\tau = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_r^2 \times 4\pi r^2\,dr = \int_0^R \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \times 4\pi r^2\,dr = \frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2 R^5}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2R}$$

Nous retrouvons bien sûr la valeur de l'énergie électrostatique totale de la sphère uniformément chargée :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e}} = \mathcal{E}_{\mathrm{e\,int}} + \mathcal{E}_{\mathrm{e\,ext}} = \frac{2\pi}{45}\frac{\rho^2 R^5}{\varepsilon_0} + \frac{2\pi}{9}\frac{\rho^2 R^5}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{15}\frac{\rho^2 R^5}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q^2}{5R}$$

Sphère uniformément chargée en surface

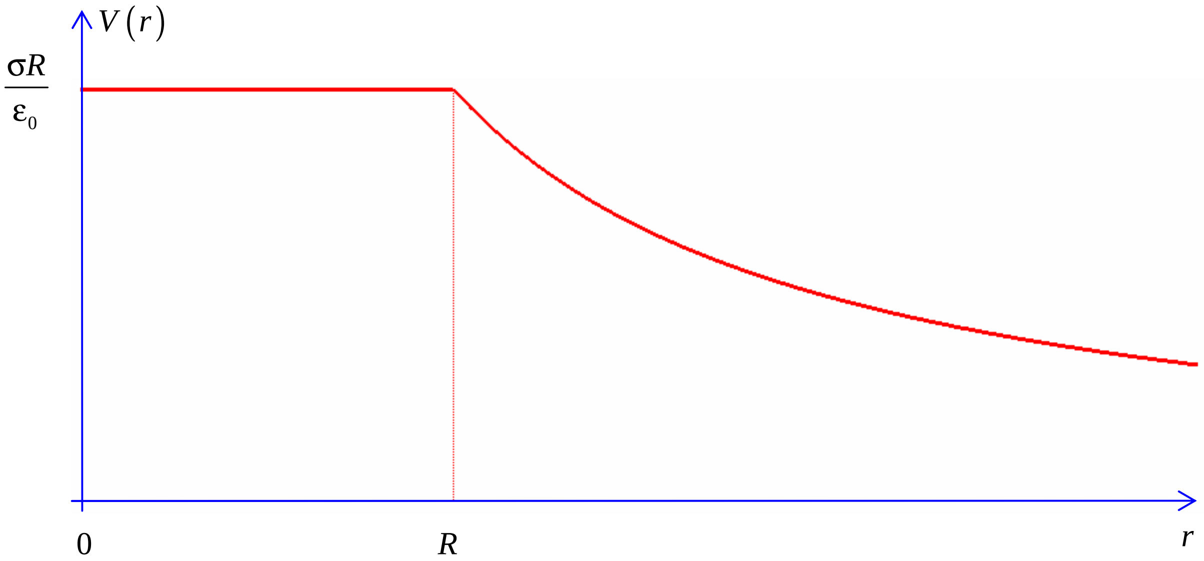
Considérons à l'identique, une sphère de rayon R uniformément chargée en surface, de charge $Q = 4\pi R^2\sigma$.

Les symétries sont les mêmes que pour l'exercice précédent. Les lignes de champ sont radiales et les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques.

Expression du potentiel

pour $r > R$, $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ donc $V(r) = -\displaystyle\int_\infty^r E_r(r')\,dr' = -\int_\infty^r \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r'^2}\,dr' = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$

Le potentiel doit être continu à la traversée de la surface de la sphère. Comme le champ est nul à l'intérieur, le potentiel y est uniforme et a pour valeur $V(R) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}$.



Remarque : la fonction potentiel est toujours continue, mais cette fois sa dérivée présente une discontinuité en $r = R$. Cette rupture de pente traduit la discontinuité du champ électrique à la traversée de la surface chargée.

Énergie électrostatique : calcul à partir du potentiel

L'énergie électrostatique de la sphère chargée s'obtient en intégrant la quantité $\sigma V/2$ sur tout la surface de la sphère, soit :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e}} = \iint_S \frac{1}{2}\sigma V\,\delta S = \frac{1}{2}\sigma V(R)\,S = 2\pi\frac{\sigma^2 R^3}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2R}$$

Énergie électrostatique : calcul à partir du champ

Le champ étant nul à l'intérieur et ayant même valeur à l'extérieur que dans le cas déjà étudié d'une sphère chargée uniformément, l'énergie électrostatique est égale à la valeur de $\mathcal{E}_{\mathrm{e\ ext}}$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e}} = \mathcal{E}_{\mathrm{e\ ext}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2R} = 2\pi\frac{R^3\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

Nous retrouvons bien sûr la même valeur.

Fil rectiligne infini uniformément chargé

Attention ! il s'agit d'un « problème d'école »

Nous considérons un segment rectiligne infini uniformément chargé d'une densité linéique λ. Ce problème présente une symétrie cylindrique de révolution. Le champ est radial, nous l'avons déjà calculé à l'occasion d'un exercice de chapitre précédent. La fonction potentiel ne dépend que de *r*.

En posant le problème de cette façon, nous considérons que la charge électrique de l'univers est infinie : ne nous étonnons pas d'en conclure que l'énergie électrostatique de ce fil chargé est infinie ! Ce sera le cas pour tout problème présentant une invariance dans une direction de l'espace. En fait, le problème posé n'est pas un problème réel, mais un « problème d'école ». Son étude n'est cependant pas sans intérêt, elle nous enseigne les propriétés électrostatiques d'un fil chargé de dimension finie à une distance du fil très petite par rapport à l'étendue du fil, que celui-ci soit rectiligne ou non.

En conséquence, il est impossible de faire le choix d'un potentiel nul à l'infini et le calcul direct du potentiel est impossible : il faut impérativement calculer le potentiel par intégration du champ.

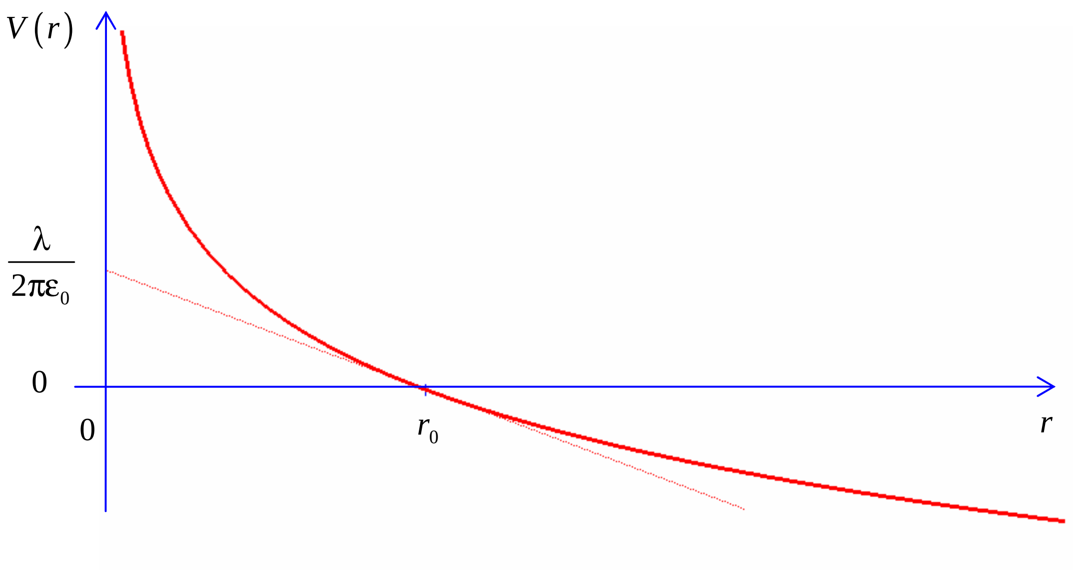
Calcul du potentiel par intégration du champ

Le champ ayant pour expression : $\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e_r} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{e_r}$

Le potentiel est égal à l'opposé de la circulation du champ :

$$V(r) = -\int_{r_0}^{r} E_r(r')\,dr' = -\int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r''}\,dr' = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

Il nous a fallu considérer une distance particulière r_0 pour laquelle nous avons fait le choix d'un potentiel nul. Nous constatons que le champ est divergent tant à l'infini qu'au voisinage du fil.



Considérations énergétiques

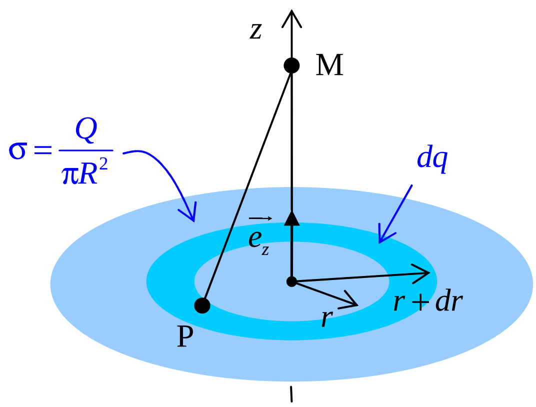
Le calcul de l'énergie par l'intermédiaire du potentiel est ici absolument impossible. Cela n'aurait strictement aucun sens dans la mesure où nous n'avons pas pu choisir le potentiel nul à l'infini.

Il reste possible de parler d'une densité volumique d'énergie électrostatique : $u_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 = \dfrac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}$

Nous constatons que cette densité présente une singularité au niveau du fil, en $r = 0$. À l'instar de ce qui se passe pour une charge ponctuelle. Nous verrons par contre, dans l'exercice suivant, que cela ne se produit pas au voisinage d'une surface chargée.

Potentiel sur l'axe d'un disque uniformément chargé

Voici un dernier exemple, qui n'est pas un problème d'école, par lequel nous allons montrer qu'il est parfois plus simple de calculer directement le potentiel électrostatique par intégration scalaire pour ensuite en déduire le champ électrostatique par dérivation. L'avantage est double : d'une part une intégration scalaire, *a priori*, est plus simple à réaliser qu'une intégration vectorielle et d'autre part il est généralement plus facile de calculer le champ par dérivation du potentiel que de calculer le potentiel par intégration du champ.



Nous nous proposons de calculer le potentiel électrostatique sur l'axe d'un disque de rayon R porteur d'une charge Q répartie de façon uniforme sous forme d'une charge surfacique $\sigma = Q/\pi R^2$.

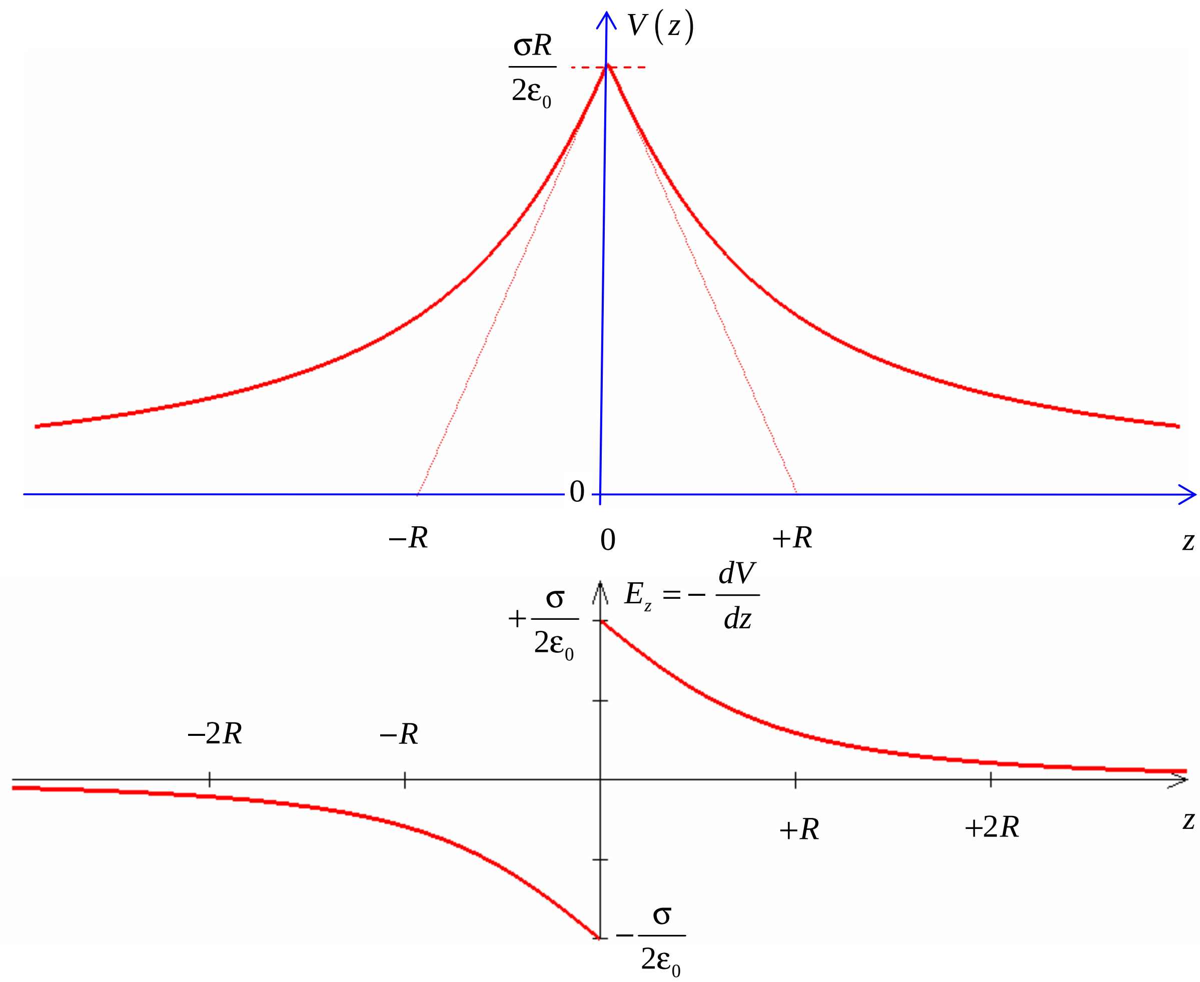
Calcul direct du potentiel par intégration scalaire

Considérons un anneau de charge compris entre les rayons r et $r+dr$, porteur d'une charge $dq = \sigma\, dS = \dfrac{Q}{\pi R^2}\times 2\pi r\, dr = \dfrac{2Q}{R^2} r\, dr$. Toute cette charge est à la même distance $\sqrt{r^2+z^2}$ du point M de cote z et la contribution élémentaire au potentiel en M a pour expression :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{R^2}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

Nous obtenons le potentiel électrostatique en M, fonction paire de z, par intégration scalaire :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$



Expression du champ électrique

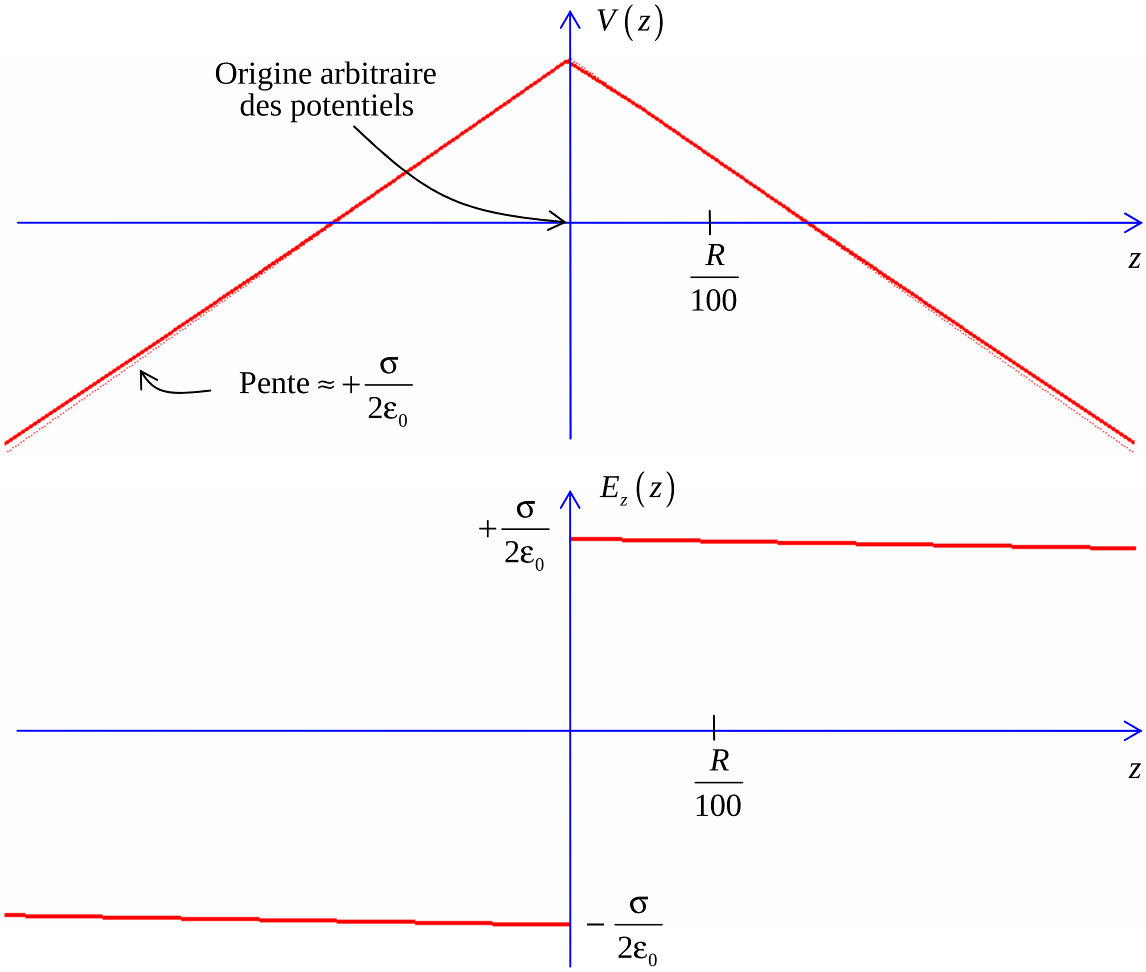
La fonction potentiel est continue et sa dérivée présente une discontinuité en $z=0$. Ceci correspond à la discontinuité attendue du champ électrique à la traversée de la surface chargée. Nous vérifions facilement par dérivation l'expression, déjà établie au chapitre précédent, du champ électrique sur l'axe du disque :

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\operatorname{sgn}(z) - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\operatorname{sgn}(z)\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

Comportement limite au voisinage immédiat du disque

Si l'on regarde la situation au voisinage immédiat du disque chargé, à une cote z telle que $|z| \ll R$, le facteur d'échelle est tel que tout se passe comme si le plan chargé était infini. C'est ainsi que le problème initial réaliste se transforme en « problème d'école ». La fonction potentiel est alors une fonction affine de la cote z, dont la croissance est du signe de la charge pour $z < 0$ (ce qui correspond à un champ électrique E_z du signe de la charge) et du signe contraire pour $z > 0$.

Dans ce passage à la limite, l'origine des potentiels est rejetée vers l'infini négatif. Pour exprimer cette fonction, il nous faudra nécessairement changer le choix d'origine des potentiels et considérer que le potentiel est nul à distance finie.



Nous voyons bien sur cet exemple que le problème d'école du plan infini uniformément chargé n'est pas un problème sans intérêt : il faut simplement savoir l'interpréter dans un domaine limité d'espace.