

## MAGNÉTOSTATIQUE

### Chapitre 1

## Champ d'induction magnétique

### 1.1. Définition du champ d'induction magnétique

#### Courants électriques

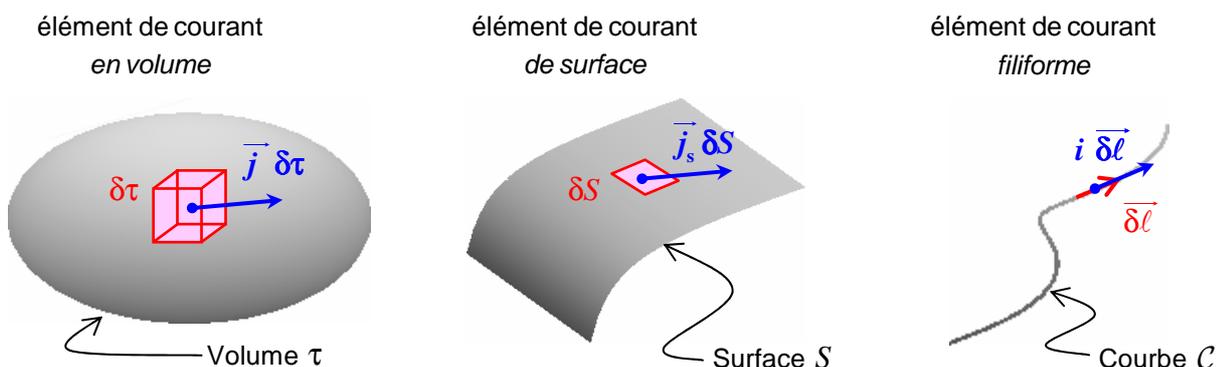
Dans le cadre de la magnétostatique, nous envisagerons l'existence de charges en mouvement, avec l'hypothèse que les courants électriques sont établis et invariants au cours du temps.

Rappelons que, dans ces conditions, le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est nécessairement à flux conservatif : c'est une implication du principe de conservation de la charge électrique (cf. ÉLECTRODYNAMIQUE, chapitre 1 : *l'approximation des régimes quasi stationnaires*). Cela se traduit par la satisfaction de l'équation locale :

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Nous introduisons le concept d'*élément de courant* dans l'intention de décrire les courants réels comme des assemblages de ces grandeurs élémentaires. Ces éléments de courants ne peuvent en aucun cas être isolés : c'est le génie d'André-Marie Ampère d'avoir produit en 1927 sa *Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*. Cette théorie permettait le calcul mathématique des actions entre courants en décrivant cette action comme étant constituée d'actions élémentaires entre éléments de courants.

Les éléments de courant  $\delta q \vec{v}$  correspondent à des charges élémentaires  $\delta q$  animées d'une vitesse  $\vec{v}$ . Ils peuvent aussi bien, selon que les charges mobiles soient volumiques, surfaciques ou linéiques, décrire des courants en volume ( $\vec{j} \delta\tau$ ), des courants de surface ( $\vec{j}_s \delta S$ ) ou des courants filiformes ( $i \delta\vec{\ell}$ ).

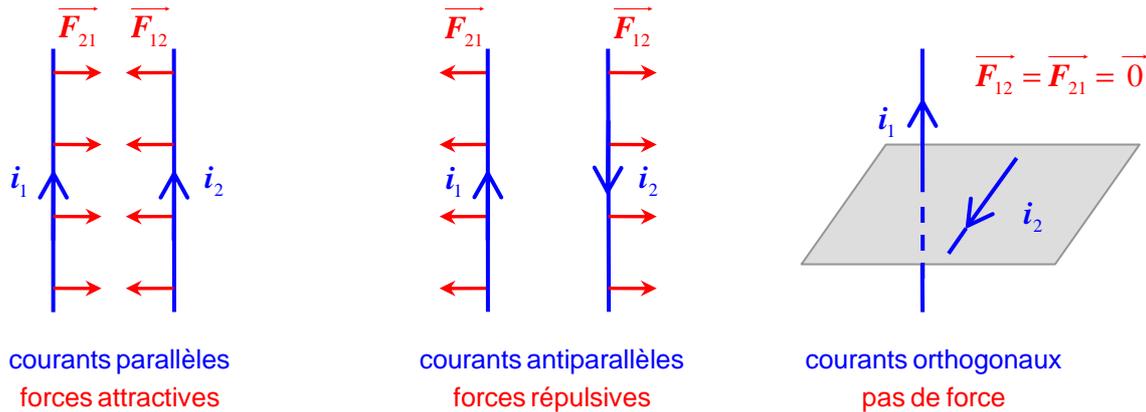


Dans chaque cas, l'élément de courant est homogène à une intensité électrique que multiplie une longueur :  $[q][v] = [j][L]^3 = [j_s][L]^2 = [I][L]$ .

### Interaction entre éléments de courants

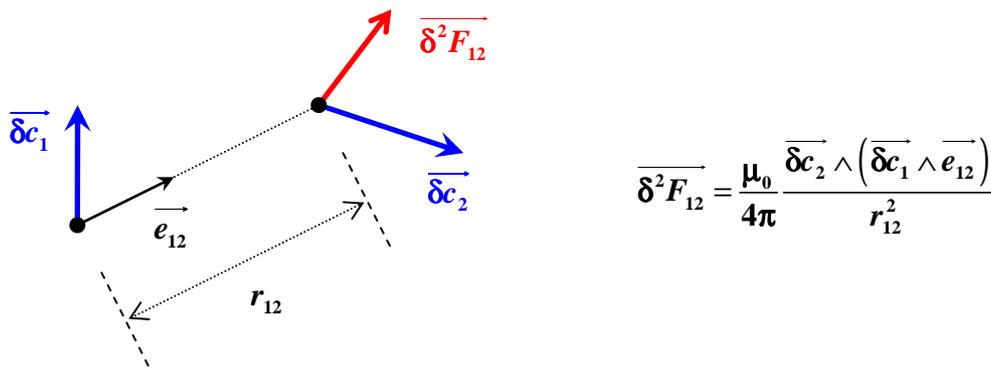
#### Postulat d'Ampère

Nous observons expérimentalement que des courants parallèles, c'est-à-dire portés par des conducteurs parallèles et circulant dans le même sens, s'attirent tandis que des courants antiparallèles, c'est-à-dire portés par des conducteurs parallèles et circulant dans des sens opposés, se repoussent. Enfin, des courants orthogonaux n'ont aucune interaction mécanique.



Sans préjuger qu'il s'agisse de courant filiforme, de courant de surface ou de courant de volume, nous noterons  $\vec{\delta c}_k$  les différents éléments de courants. Le postulat d'Ampère définit la force d'interaction entre deux éléments de courant.

**Un élément de courant  $\vec{\delta c}_1$  disposé dans le vide, exerce sur un autre élément de courant  $\vec{\delta c}_2$  une force de module inversement proportionnel au carré de leur distance mutuelle. L'intensité et la direction de la force dépend de l'orientation dans l'espace des éléments de courant et s'exprime par un double produit vectoriel :**



$$\vec{\delta^2 F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\delta c}_2 \wedge (\vec{\delta c}_1 \wedge \vec{e}_{12})}{r_{12}^2}$$

**Le coefficient de proportionnalité a pour valeur numérique exacte<sup>1</sup>  $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$  u.S.I.**

<sup>1</sup> Dans le Système International d'unités, la valeur numérique de  $\mu_0$  est choisie conventionnellement égale à  $4\pi \cdot 10^{-7}$ , ce qui revient à définir la valeur de l'ampère, unité d'intensité électrique. Ce choix n'est pas arbitraire, il implique que l'unité de tension électrique, le volt, soit de l'ordre de grandeur de la force électromotrice d'un élément de la pile de Volta.

*Remarque* : la force élémentaire  $\overline{\delta^2 F_{12}}$  définie par le postulat d'Ampère n'obéit pas, en général, au principe des actions réciproques. *A priori*,  $\overline{\delta^2 F_{12}} \neq -\overline{\delta^2 F_{21}}$ . Ce postulat, ne l'oublions pas, n'est pas vérifiable expérimentalement de façon directe. Les éléments de courant ne sauraient être isolés, ils ne sont que des intermédiaires mathématiques permettant d'exprimer l'interaction magnétique. Les lignes de courant réelles se referment nécessairement sur elles-mêmes et alors **l'interaction magnétique, intégrée sur l'étendue de ces lignes de courants, obéit au principe des actions réciproques.**

**Analogie avec la loi de Coulomb**

La loi de Coulomb, rappelons-le, exprime la force d'interaction entre deux charges élémentaires  $\delta q_1$  et

$\delta q_2$  en électrostatique :  $\overline{\delta^2 F_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q_2 \cdot (\delta q_1 \cdot \overline{e_{12}})}{r_{12}^2}$

L'analogie entre la loi de Coulomb et le postulat d'Ampère est tout à fait remarquable, avec les correspondances suivantes que l'on trouvera très fréquemment entre magnétostatique et électrostatique :

<i>électrostatique</i>		<i>magnétostatique</i>
$\epsilon_0$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{\mu_0}$
charge élémentaire $\delta q$	$\leftrightarrow$	élément de courant $\overline{\delta c}$
produit par un scalaire	$\leftrightarrow$	produit vectoriel
$\rho \delta \tau \cdot$	$\leftrightarrow$	$\overline{j} \delta \tau \wedge$
$\sigma \delta S \cdot$	$\leftrightarrow$	$\overline{j_s} \delta S \wedge$
$\lambda \delta \ell \cdot$	$\leftrightarrow$	$i \overline{\delta \ell} \wedge$

**Loi de Biot et Savart, loi de Laplace**

**Loi élémentaire de Biot et Savart**

La loi élémentaire de Biot et Savart définit le champ d'induction magnétique élémentaire  $\overline{\delta B_p}(M)$  créé en un point M de l'espace par un élément de courant  $\overline{\delta c_p}$  situé en un autre point P :

$$\overline{\delta B_p}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\overline{\delta c_p} \wedge \overline{e_{PM}}}{PM^2}$$

**Loi intégrale de Biot et Savart**

La loi élémentaire de Biot et Savart n'est aucunement vérifiable expérimentalement, puisque les éléments de courant ne peuvent être isolés. Étant donnée une distribution réelle de courant, la loi intégrale de Biot et Savart définit le champ d'induction magnétique créé par cette distribution de courant en un point M quelconque<sup>2</sup> de l'espace.

$$\overline{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{tous les courants}} \frac{\overline{\delta c_p} \wedge \overline{e_{PM}}}{PM^2}$$

<sup>2</sup> De la même façon que l'on ne peut définir le champ électrique  $\overline{E}$  à l'endroit où se trouve une charge ponctuelle, le champ  $\overline{B}$  n'est pas définissable au niveau d'un courant filiforme ou même au niveau d'une nappe de courant.

La notation intégrale est symbolique.

Elle prendra la forme d'une intégrale de volume si les courants sont en volume, confinés dans un volume  $\tau$  :

$$\vec{B} (M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \tau} \frac{\vec{j}_P \delta\tau_P \wedge \vec{e}_{PM}}{PM^2}$$

Elle prendra la forme d'une intégrale de surface si les courants sont en surface, confinés sur une surface  $S$  :

$$\vec{B} (M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{P \in S} \frac{\vec{j}_{sP} \delta S_P \wedge \vec{e}_{PM}}{PM^2}$$

et enfin d'une intégrale curviligne dans le cas d'un courant filiforme d'intensité  $i$  présent dans un circuit  $C$  :

$$\vec{B} (M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{P \in C} \frac{\vec{\delta l}_P \wedge \vec{e}_{PM}}{PM^2}$$

Le champ magnétique ainsi défini peut être mesuré par son action locale sur des particules chargées en mouvement ou par son action sur des conducteurs parcourus par des courants.

Du fait de sa définition intégrale, le champ magnétique obéit bien sûr, comme c'était le cas pour le champ électrique, à un principe de superposition :

**Principe de superposition**

Étant donnée une partition d'une distribution de courants, le champ créé par la distribution toute entière est égal à la somme de l'ensemble des champs créés par chaque partie.

**Loi de Laplace**

Le postulat élémentaire d'Ampère s'écrit aussi bien, en introduisant le champ défini par la loi élémentaire de Biot et Savart :

$$\vec{\delta^2 F}_P (M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\delta c}_M \wedge (\vec{\delta c}_P \wedge \vec{e}_{PM})}{PM^2} = \vec{\delta c}_M \wedge \vec{\delta B}_P (M)$$

Cette force élémentaire n'est bien sûr pas mesurable, mais son intégrale étendue à une distribution réelle de courants est donnée par la loi de Laplace :  $\vec{\delta F} (M) = \int_{\text{tous les courants}} \vec{\delta^2 F}_P (M)$

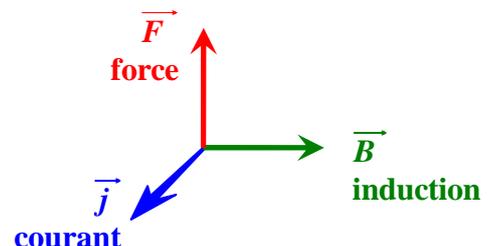
La force élémentaire s'exerçant sur un élément de courant placé en un point M de l'espace où le champ magnétique a pour valeur  $\vec{B}$  a pour expression :

$$\vec{\delta F} (M) = \vec{\delta c}_M \wedge \vec{B} (M)$$

Dans cette expression, l'élément de courant  $\vec{\delta c}_M$  peut aussi bien s'écrire  $\vec{j}(M)\delta\tau_M$  dans le cas des courants de volume,  $\vec{j}_s(M)\delta S_M$  dans le cas de courants de surface ou  $i(M)\vec{\delta l}_M$  dans le cas de courants filiformes.



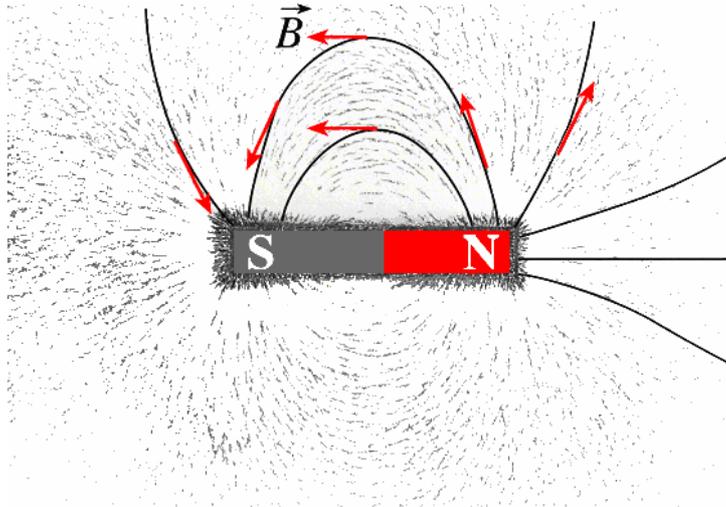
**Attention !** Le produit vectoriel n'est pas commutatif. Dans l'expression de la force de Laplace, tout comme dans l'expression du champ d'induction magnétique dans la loi élémentaire de Biot et Savart, il convient d'écrire l'élément de courant comme premier terme du produit vectoriel. Courant, induction et force forment un trièdre direct :  $(\vec{j}, \vec{B}, \vec{F}) > 0$



### Les aimants

La loi de Laplace n'est pas seulement une forme intégrale du postulat d'Ampère, elle est plus générale que cela.

En particulier, le champ d'induction magnétique peut être dû non seulement à des courants, mais aussi à des aimants, sources naturelles de champs d'induction magnétique associant toujours un pôle Nord et un pôle Sud, les lignes du champ étant dirigées du pôle Nord vers le pôle Sud.



L'étude du magnétisme dans la matière n'est pas à notre programme, mais nous verrons dans un prochain chapitre qu'un tout petit aimant crée dans l'espace un *champ magnétique dipolaire* dont la topologie est tout à fait analogue à celle d'un dipôle électrique pour le champ électrique.

### Symétries et antisymétries : notion de pseudo vecteur

Dans l'expression de définition du champ magnétique intervient un produit vectoriel. Cela fait que le concept de champ magnétique dépend, pour son sens, de deux conventions :

- Une *convention physique* désigne arbitrairement le signe des charges. Cette convention internationale est claire : les électrons ont une charge négative et les protons une charge positive. Changer de convention reviendrait, dans la loi de Laplace, à changer simultanément le sens des courants et le sens du champ d'induction magnétique : la force de Laplace n'en serait pas affectée.
- Une *convention mathématique* désigne arbitrairement la règle du trièdre direct ou, cela revient au même, le signe du produit vectoriel. Changer cette convention reviendrait à changer le sens du champ magnétique défini par la loi de Biot et Savart, mais la force de Laplace, bien sûr, ne changerait pas de sens...

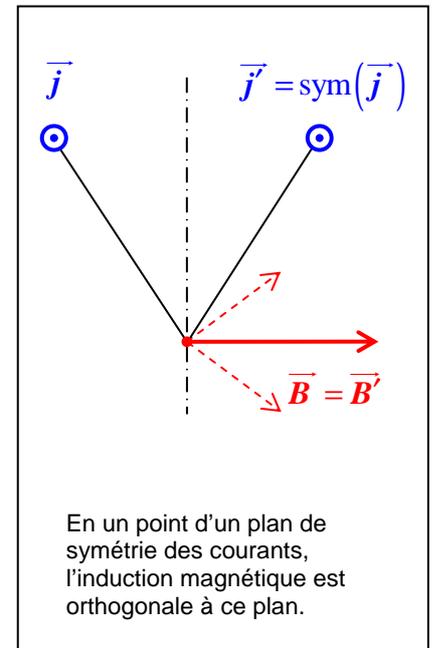
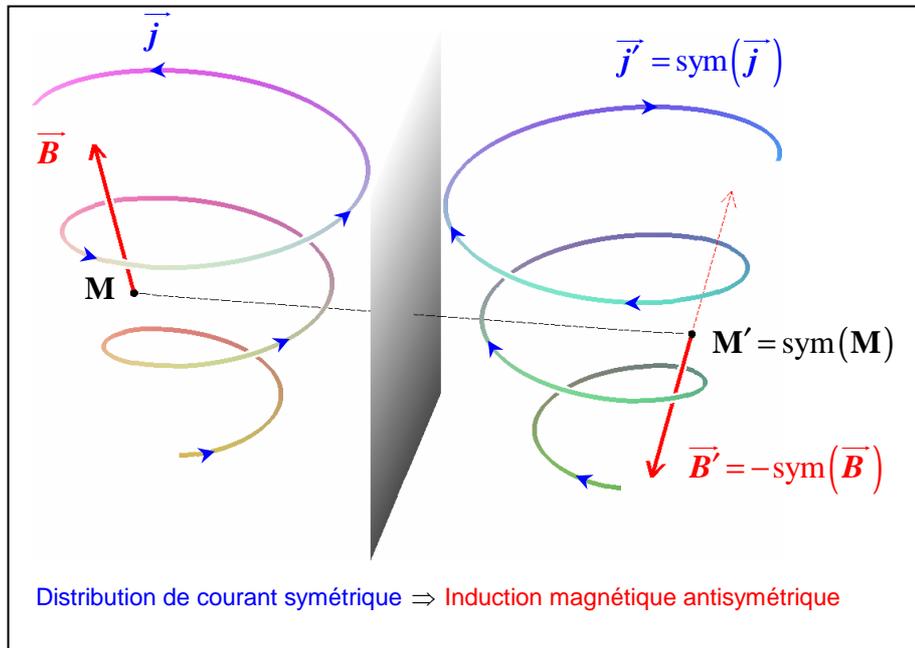
Les champs d'induction magnétique  $\vec{B}$  sont des champs « tourbillonnaires ». À l'instar des *vecteurs rotation*  $\vec{\Omega}$  en cinématique, leur sens dépend de la convention d'orientation de l'espace, ou convention du trièdre direct.

De tels champs vectoriels seront qualifiés de « pseudo vecteurs » : leur image dans un miroir plan renvoie non pas le vecteur symétrique, mais son opposé, que l'on qualifiera de vecteur antisymétrique.

Les théorèmes suivants en sont la conséquence :

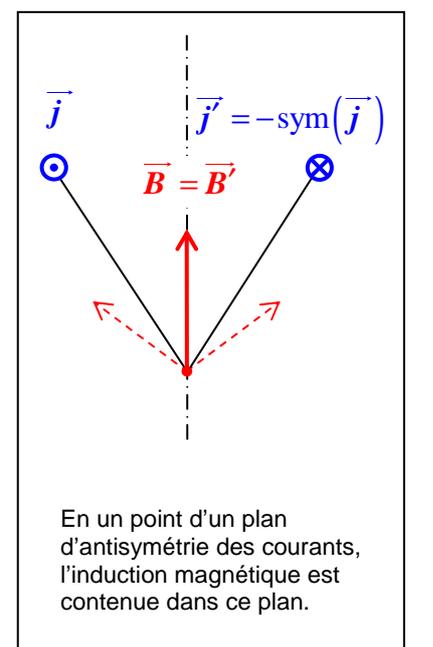
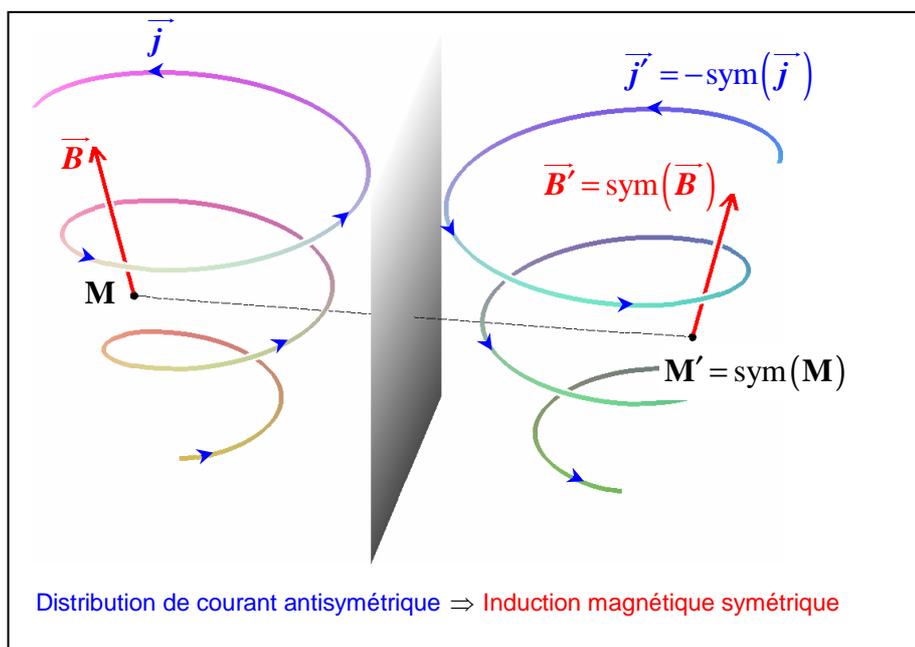
S'il existe un plan de symétrie de la distribution de courant, le champ d'induction magnétique  $\vec{B}'$  au point  $M'$  symétrique du point  $M$  est l'opposé du symétrique par rapport à ce plan du champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  en  $M$ .

*Corollaire :* Pour un point  $P$  appartenant au plan de symétrie, l'induction magnétique doit être l'opposé de son propre symétrique par rapport à ce plan, c'est-à-dire qu'elle doit être orthogonale à ce plan.



S'il existe un plan de d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ d'induction magnétique  $\vec{B}'$  au point  $M'$  symétrique du point  $M$  est le symétrique par rapport à ce plan du champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  en  $M$ .

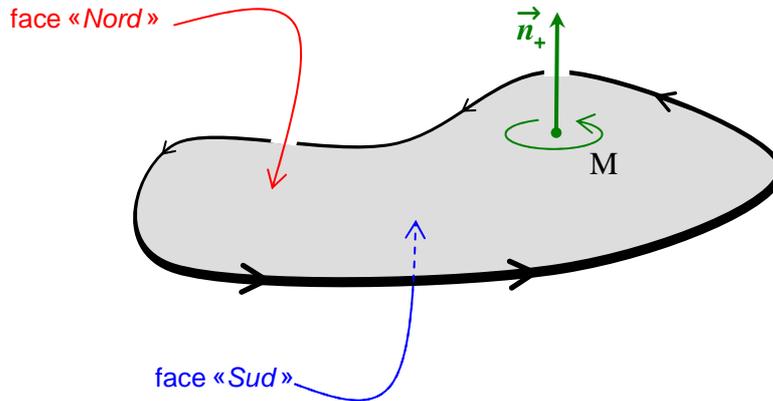
*Corollaire :* Pour un point  $P$  appartenant au plan de d'antisymétrie, l'induction magnétique doit être son propre symétrique par rapport à ce plan, c'est-à-dire qu'elle doit être contenue dans ce plan.



## 1.2. Théorème d'Ampère

### Notion de courant enlacé

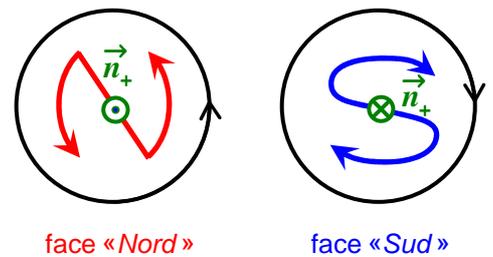
Le terme « enlacé » est à comprendre ici dans le sens *entouré*. Considérons un parcours fermé  $\mathcal{C}$  topologiquement équivalent à un cercle : aucun nœud ne doit être formé. Le parcours  $\mathcal{C}$  est orienté. Dans cette acception, pour toute surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}$ , il est possible de définir une face *Sud* et une face *Nord*, selon la règle définie par le schéma suivant :



En chaque point  $M$  de la surface  $S$ , nous définissons un vecteur normal « positif »  $\vec{n}_+$  de telle sorte que le sens de rotation positif autour de  $\vec{n}_+$  corresponde par continuité au sens d'orientation du contour  $\mathcal{C}$ . Le vecteur  $\vec{n}_+$  traverse la surface  $S$  en pénétrant par la face Sud et émergeant par la face Nord.

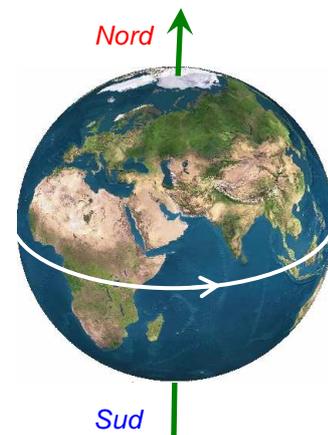
On dit encore que le vecteur  $\vec{n}_+$  est enlacé *positivement* par le contour  $\mathcal{C}$  et nous définissons ainsi l'enlacement comme un concept algébrique.

*Remarque :* Voici une bonne méthode mnémotechnique permettant rapidement de différencier une face Nord d'une face Sud. Pour une face Nord, le parcours est orienté par la lettre « **N** » tandis que pour une face Sud, il est orienté par la lettre « **S** ».



*Note historique :* Ces appellations « Nord » et « Sud » ne sont pas tout à fait arbitraires. Souvenons-nous que ces choix ont été faits par des hommes habitant l'hémisphère Nord de la planète. L'axe polaire est dès lors *culturellement* orienté du Sud vers le Nord et le sens de rotation positif autour de cet axe orienté correspond au sens de rotation de la Terre sur elle-même.

C'est un bon moyen mnémotechnique pour retenir la convention d'orientation positive de l'espace : le mouvement diurne apparent du Soleil sur la voûte céleste —*j'ose espérer que chacun le connaît*— correspond à un mouvement réel de rotation de la Terre dans le sens opposé.



Revenons à nos courants électriques qui peuvent être des courants en volume, des courants de surface ou des courants filiformes. Nous dirons qu'un courant est enlacé par un parcours fermé  $\mathcal{C}$ , si, considérant une surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}$ , ce courant traverse la surface  $S$ . Le parcours  $\mathcal{C}$  étant orienté, l'enlacement sera positif si le courant traverse la surface  $S$  du Sud vers le Nord, négatif dans le cas contraire.

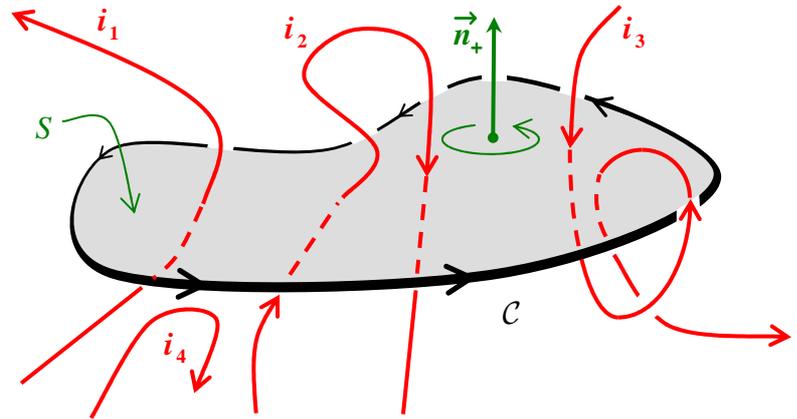
Dans le cas de courants filiformes, l'intensité enlacée est égale à la somme algébrique des intensités traversant une surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}$ , en comptant positivement les courants traversant dans le sens Sud  $\rightarrow$  Nord et négativement les courants traversant dans le sens Nord  $\rightarrow$  Sud.

*Exemple 1 :* Pour le cas de figure présenté ci-contre, le courant  $i_1$  est enlacé positivement par le parcours  $\mathcal{C}$ .

Les courants  $i_2$  et  $i_4$  ne sont pas enlacés ( $i_2$  est enlacé une fois positivement et une fois négativement).

Le courant  $i_3$  est enlacé deux fois négativement.

L'intensité algébriquement enlacée a donc pour valeur :  $i_{\text{enlacée}} = i_1 - 2i_3$



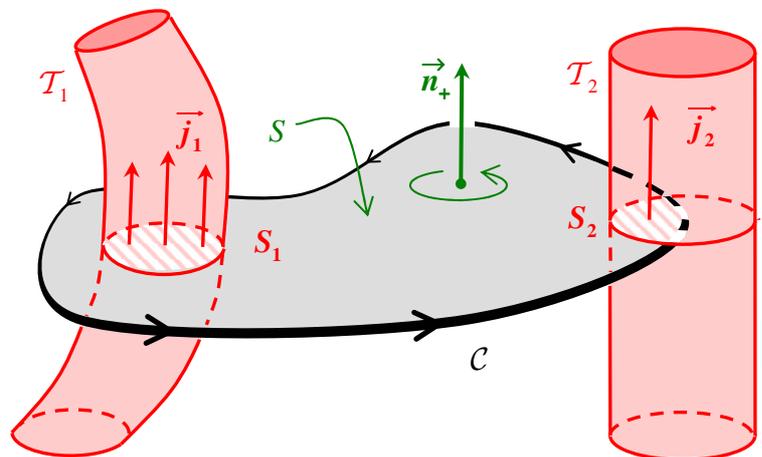
Dans le cas de courants définis en volume par une densité de courant, nous définissons l'intensité enlacée comme le flux de  $\vec{j}$  à travers la surface  $S$  orientée par le champ de vecteurs  $\vec{n}_+$ .

$$i_{\text{enlacée}} = \iint_{P \in S} \vec{j}(P) \cdot \vec{n}_+(P) \delta S$$

*Exemple 2 :* Sur le schéma ci-contre, le tube de courant  $\mathcal{T}_1$  est totalement enlacé.

Le tube de courant  $\mathcal{T}_2$  n'est quant à lui que partiellement enlacé. Dans la définition du courant enlacé, la surface  $S_1$  est étendue à la section entière du tube  $\mathcal{T}_1$  tandis que la surface  $S_2$  se limite à la zone hachurée.

$$i_{\text{enlacée}} = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}_+ \delta S = \iint_{S_1 \oplus S_2} \vec{j} \cdot \vec{n}_+ \delta S$$



**Attention !** Nous parlons de courant enlacé par un contour  $\mathcal{C}$ . Pour être recevable, notre définition suppose implicitement que le choix d'une surface  $S$  particulière s'appuyant sur le contour  $\mathcal{C}$  n'ait aucune incidence sur la définition de l'intensité enlacée. Cela n'est vrai que dans la mesure où la densité de courant est un champ de vecteurs à flux conservatif. C'est le cas dans le cadre de la magnétostatique et même plus généralement dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS), la densité de courant vérifiant alors en tout point de l'espace et à tout instant la relation :  $\text{div} \vec{j} = 0$ . Toutefois, **le concept d'intensité enlacée ne pourra plus être défini dans le cadre plus général de l'électromagnétisme, hors de l'ARQS.**

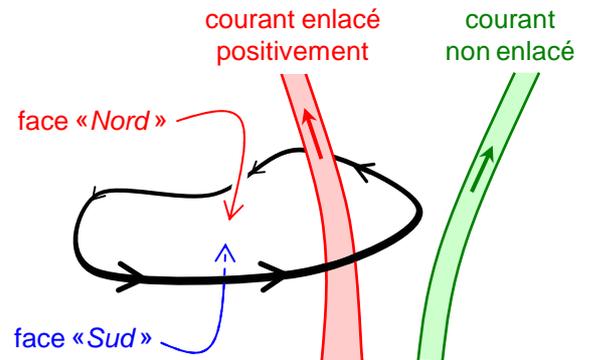
### Énoncé du théorème d'Ampère

Nous admettons, sans démonstration, le *théorème d'Ampère* qui est une implication du postulat élémentaire d'Ampère :

**Soit, dans le vide, une distribution stationnaire de courants créant dans tout l'espace un champ d'induction magnétique  $\vec{B}$  constant.**

**La circulation de  $\vec{B}$  le long d'une courbe fermée imaginaire  $C$  quelconque est égale au produit par la perméabilité du vide  $\mu_0$  de l'intensité électrique enlacée par la contour  $C$ .**

$$\oint_C \vec{B} \cdot \delta\vec{\ell} = \mu_0 i_{\text{enlacée}}$$



**Le parcours  $C$  étant orienté, l'intensité enlacée est comptée positivement quand les courants pénètrent par la face Sud et émergent par la face Nord, négativement dans le sens contraire.**



**Attention !** Alors que le théorème de Gauss est un théorème général de l'électromagnétisme, il n'en est pas de même du théorème d'Ampère qui n'est valable, pour ce qui le concerne, que dans le cadre de l'ARQS.

### Expression locale du théorème d'Ampère

Selon la formule de Stokes, la circulation d'un champ de vecteurs le long d'un parcours fermé orienté  $C$  est égale au flux du rotationnel de ce champ de vecteurs à travers une surface  $S$  quelconque s'appuyant sur ce contour, le champ  $\vec{n}_+$  de vecteurs unitaires normaux à la surface  $S$  étant orienté conformément à l'orientation de la courbe  $C$  :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \delta\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{n}_+ \delta S$$

Selon le théorème d'Ampère, dans le cas de courants stationnaires, cette circulation est égale à  $\mu_0$  fois l'intensité enlacée, c'est-à-dire à  $\mu_0$  fois le flux du vecteur densité de courant à travers toute surface  $S$  s'appuyant sur le contour  $C$  :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \delta\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot \vec{n}_+ \delta S = \mu_0 i_{\text{enlacée}} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n}_+ \delta S$$

Cette propriété étant vraie quelle que soit la courbe  $C$ , nous en déduisons qu'en tout point de l'espace où le champ  $\vec{B}$  est défini, la relation suivante est vérifiée en régime permanent :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{en régime permanent})$$



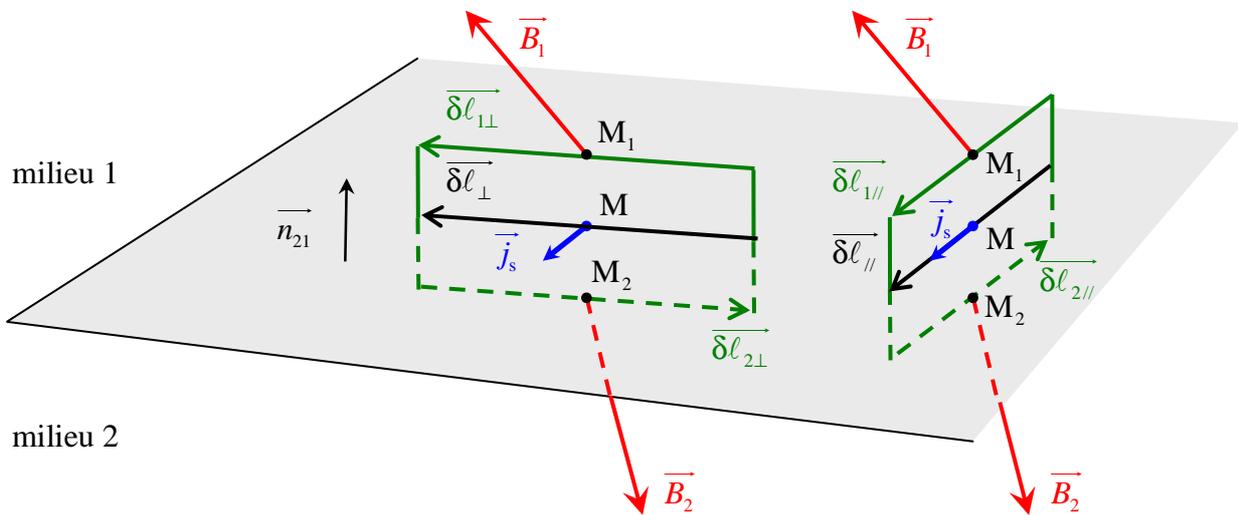
**Attention !** Alors que l'équation  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ , forme locale du théorème de Gauss, est l'une des quatre *équations de Maxwell* régissant l'électromagnétisme dans le vide dans le cadre le plus général, il n'en est pas de même de l'équation locale  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  qui n'est valable, pour ce qui la concerne, que dans le cadre de l'ARQS.

### Discontinuité de la composante tangentielle du champ d'induction magnétique à la traversée d'une nappe de courants de surface

Considérons une nappe de courant de densité de courant de surface  $\vec{j}_s$  et un déplacement élémentaire  $\vec{\delta\ell}_\perp$  orthogonal au courant en un point M de cette surface S que nous supposons localement plane.

Dans le but d'appliquer le théorème d'Ampère, nous allons construire un parcours fermé autour du point M en imaginant un rectangle dans un plan orthogonal à S constitué des parcours élémentaires  $\delta\ell_{\perp 1}$  et  $\delta\ell_{\perp 2}$  immédiatement voisins de  $\delta\ell_\perp$  dans le milieu 1 et dans le milieu 2. Dans la limite considérée, la surface du rectangle a une mesure nulle et la circulation du champ d'induction magnétique à travers le parcours d'Ampère se réduit aux deux seules circulations le long des segments élémentaires  $\delta\ell_{\perp 1}$  et  $\delta\ell_{\perp 2}$ . D'après le théorème d'Ampère, cette circulation est égale à l'intensité enlacée, flux unidimensionnel de  $\vec{j}_s$  à travers la frontière  $\vec{\delta\ell}_\perp$ , soit  $di_{\text{enlacée}} = j_s \delta\ell_\perp$ , multipliée par la perméabilité du vide  $\mu_0$ .

Nous noterons  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  les champs d'inductions magnétiques dans les milieux 1 et 2 aux points  $M_1$  et  $M_2$  immédiatement voisins de M.



Dans la limite où les points  $M_1$  et  $M_2$  tendent vers M, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\delta\Gamma_\perp = \vec{B}_1 \cdot \vec{\delta\ell}_{\perp 1} + \vec{B}_2 \cdot \vec{\delta\ell}_{\perp 2} = (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{\delta\ell}_\perp = \mu_0 di_{\text{enlacée}} = \mu_0 j_s \delta\ell_\perp$$

Considérons maintenant un déplacement  $\vec{\delta\ell}_\parallel$  parallèle au courant et faisons le même raisonnement. Dans ce cas, aucun courant n'est enlacé et l'on en déduit, par application du théorème d'Ampère, la relation :

$$\delta\Gamma_\parallel = \vec{B}_1 \cdot \vec{\delta\ell}_{\parallel 1} + \vec{B}_2 \cdot \vec{\delta\ell}_{\parallel 2} = (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{\delta\ell}_\parallel = 0$$

En conclusion, si l'on décompose le champ  $\vec{B}$  en une composante normale  $\vec{B}_N$  et une composante tangentielle  $\vec{B}_T$  elle-même décomposée en  $\vec{B}_{T\parallel}$  (parallèle au courant) et  $\vec{B}_{T\perp}$  (perpendiculaire au courant), nous avons démontré que les composantes  $\vec{B}_{T\parallel}$  sont continues et les composantes  $\vec{B}_{T\perp}$  discontinues au passage d'une nappe de courant de surface.

En introduisant le vecteur unitaire  $\vec{n}_{21}$  en M dirigé du milieu 2 vers le milieu 1, cette discontinuité de  $\vec{B}_T$  se traduit par la relation vectorielle :

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{21} = \mu_0 \vec{j}_s$$

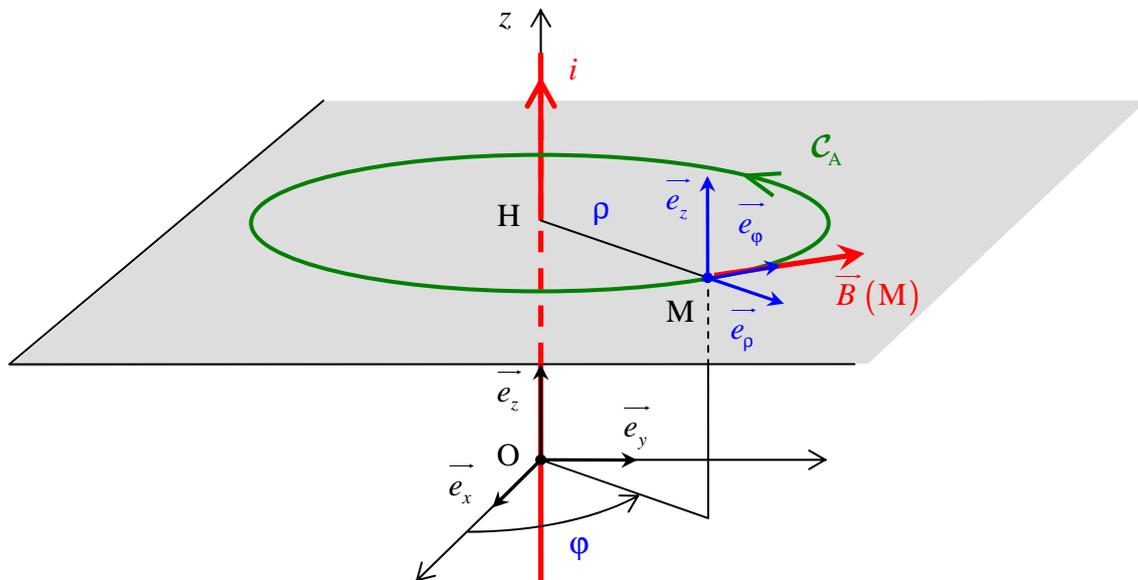
Nous montrerons plus loin que la composante normale du champ d'induction magnétique est quant à elle nécessairement continue.

### 1.3. Calcul de champ d'induction magnétique par application du théorème d'Ampère

#### Distributions de courants axiales à symétrie cylindrique de révolution

##### Étude de symétrie

Un courant d'intensité  $i$  circule dans la direction  $Oz$  et la répartition des courants présente symétrie cylindrique de révolution autour de l'axe  $Oz$ . Un système de coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  ayant l'axe  $Oz$  pour axe de révolution s'impose évidemment pour cette étude.



En chaque point M de l'espace, le plan  $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution des courants. Nous en déduisons que le champ d'induction magnétique en M est perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire orthoradial :

$$\vec{B}(M) = B_\varphi \vec{e}_\varphi$$

De plus, le problème étant invariant par rotation quelconque autour de l'axe  $Oz$  et par translation quelconque selon l'axe  $Oz$ , la composante  $B_\varphi$  ne dépend ni de  $\varphi$  ni de  $z$  mais seulement de  $\rho$  :

$$\vec{B}(M) = B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi$$

*Remarque :* Attention de ne pas dire que le champ  $\vec{B}$  ne dépend que de  $\rho$ , ce qui est faux puisque la direction de  $\vec{B}$  dépend de  $\varphi$  :  $\vec{B}(M) = B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi(\varphi)$ .

Dans le but d'appliquer efficacement le théorème d'Ampère, nous choisirons pour parcours le cercle  $C_A$  passant par le point M, de rayon  $\rho$ , centré sur l'axe Oz et orthogonal à cet axe. Sur ce parcours, orienté dans le sens direct de telle sorte qu'il enlace positivement l'intensité  $i$ , la circulation du champ d'induction magnétique a pour expression :

$$\Gamma = \oint_{C_A} \vec{B} \cdot \vec{\delta\ell} = \oint_{C_A} B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi \cdot \delta\ell \vec{e}_\varphi = B_\varphi(\rho) \oint_{C_A} \delta\ell = 2\pi\rho B_\varphi(\rho)$$

### Fil rectiligne infini

Un conducteur filiforme rectiligne infini est parcouru par un courant stationnaire  $i$ . Voilà un énoncé de situation définissant typiquement un « problème d'école » : la modélisation filiforme en elle-même est déjà simplificatrice, mais en plus le conducteur est infini... Nous savons déjà ce qu'il faut en penser : une telle description permet de prédire en bonne approximation ce qui se passe au voisinage d'un conducteur réel, mais les résultats de nos calculs ne sauraient être considérés comme significatifs jusqu'à l'infini.

Le théorème d'Ampère nous donne par conséquent :  $\Gamma = 2\pi\rho B_\varphi(\rho) = \mu_0 i$

Et donc, finalement :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi$$

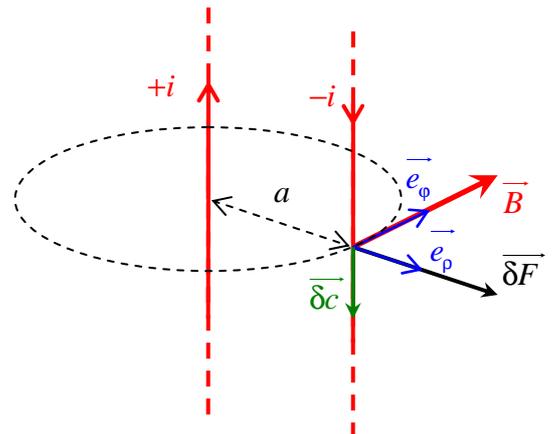
### Définition de l'Ampère

Considérons dans le vide une ligne bifilaire constituée de deux conducteurs filiformes parallèles à une distance  $a$  l'un de l'autre, parcourus par des courants opposés  $+i$  et  $-i$ . Ces conducteurs se repoussent et, conformément à la loi de Laplace, un élément de courant  $\vec{\delta c} = i \vec{\delta\ell}$  subit une force :

$$\vec{\delta F} = i \vec{\delta\ell} \wedge \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a} \vec{\delta\ell} \wedge \vec{e}_\varphi$$

La force est répulsive et sa valeur linéique a pour expression :

$$\frac{\delta F}{\delta\ell} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}$$



Dans le Système international d'unités, l'ampère est défini comme l'intensité d'un courant qui, parcourant en sens opposés deux conducteurs parallèles infinis distants de 1 mètre, provoquerait l'existence d'une force répulsive égale à  $2 \times 10^{-7}$  newton par mètre de conducteur. Cette définition équivaut à fixer la valeur de la perméabilité du vide  $\mu_0$  à  $4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$ .

### Conducteur cylindrique parcouru par un courant de volume uniforme

Ce problème présente les mêmes symétries et invariances que le précédent, nous recherchons donc un champ d'induction magnétique de la forme  $\vec{B}(M) = B_\varphi(\rho) \vec{e}_\varphi$ .

Notons  $i$  l'intensité totale uniformément répartie dans le volume du conducteur avec une densité de courant uniforme  $\vec{j} = \frac{i}{\pi R^2} \vec{e}_z$ .

Le problème diffère du précédent pour l'évaluation de l'intensité électrique enlacée. Nous devons distinguer deux cas :

- Si le point M est à l'extérieur du fil cylindrique, la totalité du courant est enlacé :

$$i_{\text{enlacée}} = \pi R^2 j = i$$

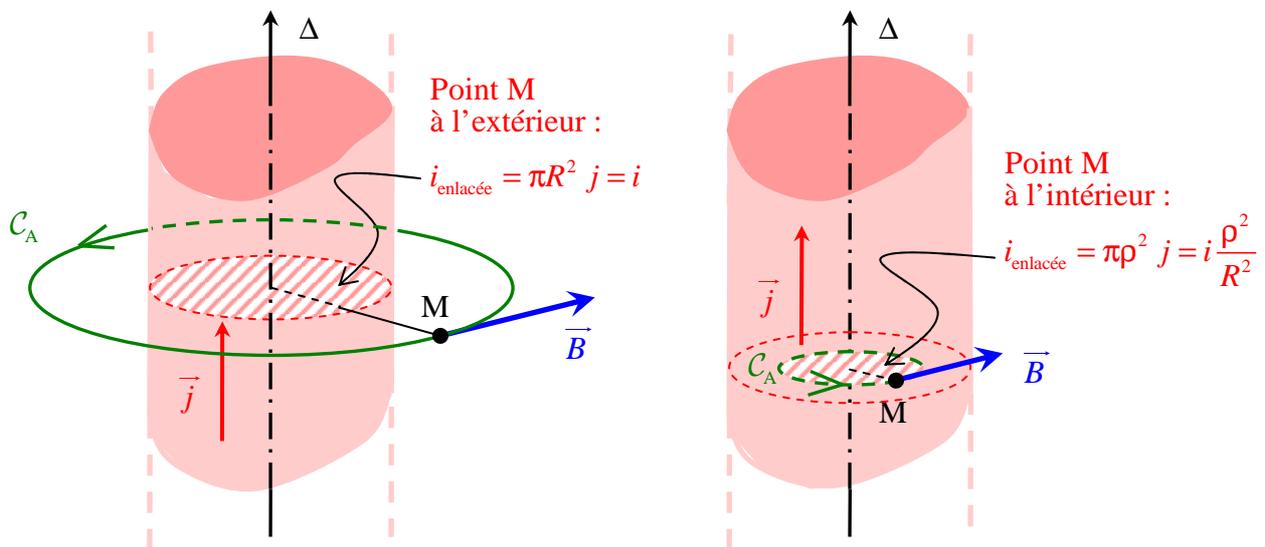
Le théorème d'Ampère conduit alors à la même expression du champ que pour un courant rectiligne filiforme<sup>3</sup>, soit, pour  $\rho > R$  :  $B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 j R^2}{2\rho}$

- Si le point M est à l'intérieur du fil cylindrique, seule une partie du courant est enlacée :

$$i_{\text{enlacée}} = \pi\rho^2 j = i \frac{\rho^2}{R^2}$$

Le théorème d'Ampère s'exprime alors par la relation :  $\Gamma = 2\pi\rho B_\varphi(\rho) = \mu_0 i_{\text{enlacée}} = \pi\rho^2 \mu_0 j$

Et nous en déduisons, pour  $\rho < R$  :  $B_\varphi(\rho) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{\rho}{R^2} = \frac{\mu_0 j \rho}{2}$

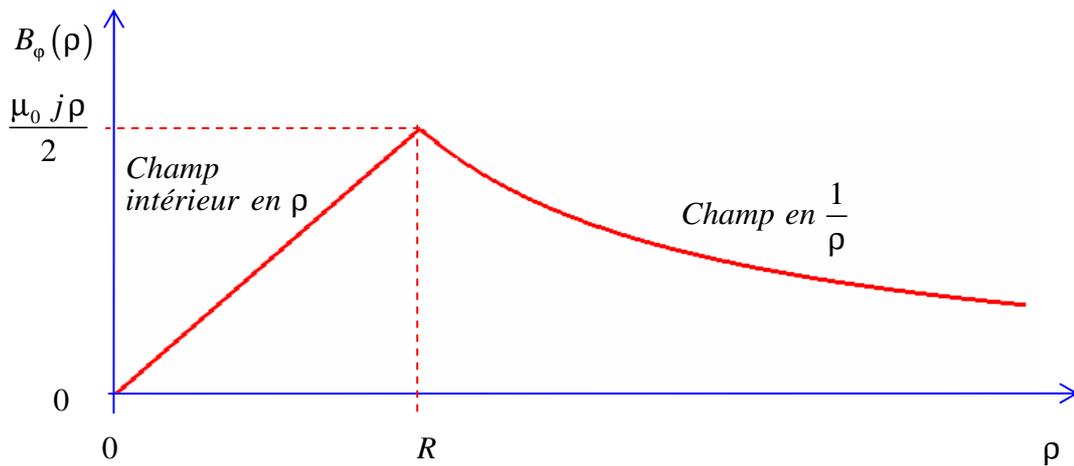


En conclusion, nous avons ainsi démontré que le champ d'induction magnétique varie continûment dans l'espace conformément aux expressions :

$$\begin{cases} \rho \leq R & \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i \rho}{2\pi R^2} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 j \rho}{2} \vec{e}_\varphi \\ \rho \geq R & \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 j R^2}{2\rho} \vec{e}_\varphi \end{cases}$$

Le graphe suivant fait apparaître la continuité du champ, celui présentant une norme maximale pour  $\rho = R$ , à la surface du fil cylindrique.

<sup>3</sup> Nous pouvons remarquer que ce résultat simple n'exige pas que la densité de courant soit uniforme à l'intérieur du fil, il suffit en effet qu'elle soit invariante par rotation et par translation. Une répartition de courant de la forme  $\vec{j} = j_z(\rho)\vec{e}_z$  conduirait au même résultat à l'extérieur du fil. Ce ne serait évidemment pas le cas à l'intérieur du fil...

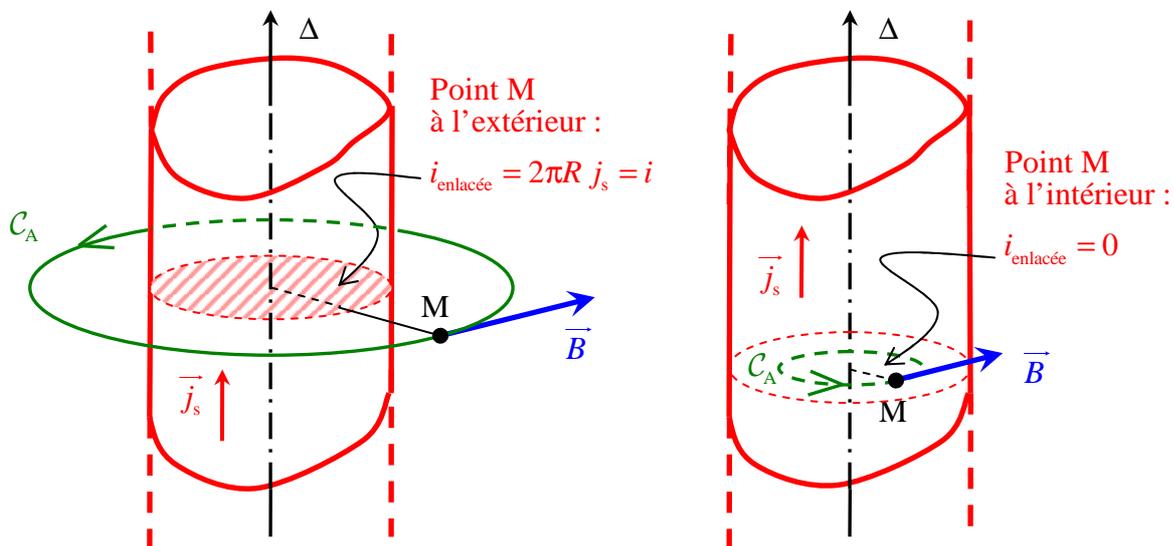


**Conducteur cylindrique parcouru par un courant de surface uniforme**

Ce problème présente cette fois encore les mêmes symétries et invariances que le précédent, nous recherchons donc un champ d'induction magnétique de la forme  $\vec{B}(\mathbf{M}) = B_\phi(\rho) \vec{e}_\phi$ .

Notons  $i$  l'intensité totale uniformément répartie dans la surface du conducteur avec une densité de courant de surface  $\vec{j}_s = \frac{i}{2\pi R} \vec{e}_z$ .

De la même façon, nous choisissons pour parcours d'Ampère  $C_A$  le cercle passant par le point  $M$ , de rayon  $\rho$ , centré sur l'axe  $Oz$  et orthogonal à cet axe. Sur ce parcours, orienté dans le sens direct, la circulation du champ d'induction magnétique a pour expression :  $\Gamma = 2\pi\rho B_\phi(\rho)$



De la même façon que précédemment, pour l'évaluation de l'intensité électrique enlacée, nous devons distinguer deux cas :

- Si le point  $M$  est à l'extérieur du fil cylindrique, la totalité du courant est enlacé :  $i_{\text{enlacée}} = 2\pi R j_s = i$

Le théorème d'Ampère conduit alors à la même expression du champ que pour un courant rectiligne filiforme, soit, pour  $\rho > R$  :  $B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 j_s R}{\rho}$

- Si le point M est à l'intérieur du fil cylindrique, aucun courant n'est enlacé :  $i_{\text{enlacée}} = 0$

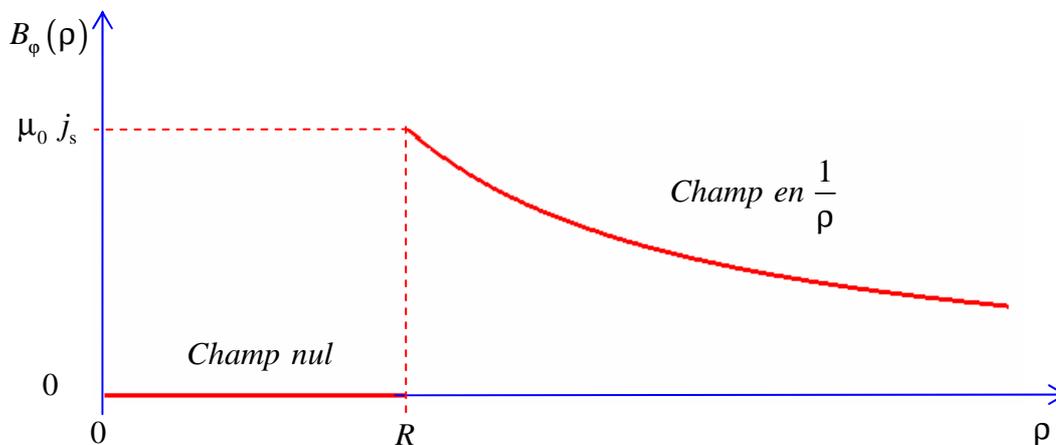
Le théorème d'Ampère s'exprime alors par la relation :  $\Gamma = 2\pi\rho B_\phi(\rho) = \mu_0 i_{\text{enlacée}} = 0$

Et nous en déduisons, pour  $\rho < R$  :  $B_\phi(\rho) = 0$

En conclusion, nous avons ainsi démontré que le champ d'induction magnétique varie continûment dans l'espace conformément aux expressions :

$$\begin{cases} \rho \leq R & \vec{B}(\text{M}) = \vec{0} \\ \rho \geq R & \vec{B}(\text{M}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 j_s R}{\rho} \vec{e}_\phi \end{cases}$$

Le graphe suivant fait apparaître la discontinuité du champ à la surface du fil cylindrique, au franchissement de la nappe de courant de surface.



*Remarque* : le champ électrique présente une discontinuité à la surface du cylindre égale à  $\mu_0 j_s$ . La composante du champ d'induction magnétique tangentielle à la nappe de courant et orthogonale au courant, comme il se doit, est discontinue à la traversée d'une surface chargée.

## Distribution de courant orthoradiale à symétrie cylindrique de révolution (Solénoïde idéal)

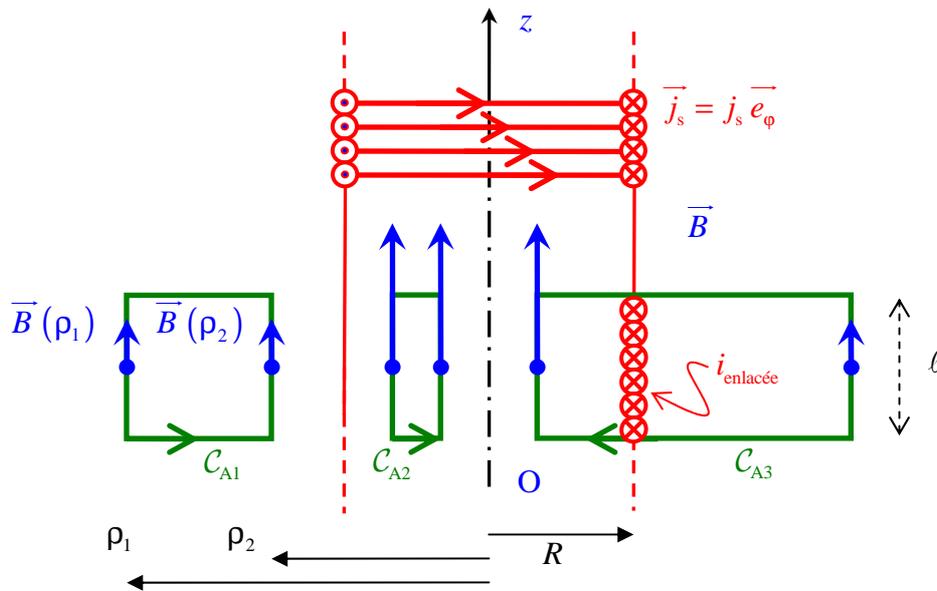
### Étude de symétrie

Ce problème est fondamentalement différent du précédent. Il s'agit toujours d'une nappe de courant sur une surface cylindrique, mais cette fois le courant s'enroule autour de l'axe  $Oz$ . Nous étudions ici le problème correspondant à un cylindre infini. Le problème, en plus d'être invariant par rotation quelconque autour de  $Oz$  est donc également invariant par translation quelconque selon  $Oz$ . Remarquons que s'il s'agit encore ici d'un « problème d'école », nous sommes dans une situation plus réaliste : il n'y a plus ici de courants qui s'en vont à l'infini sans retour...

Dans cette nouvelle situation, tous les plans perpendiculaires à l'axe  $Oz$  sont des plans de symétrie de la distribution des courant : nous en déduisons qu'en tout point de l'espace le champ d'induction magnétique est orthogonal à ces plans, c'est-à-dire dirigé selon  $Oz$  :  $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ .

De plus, les invariances impliquent que la composante  $B_z$  ne dépend que du rayon cylindropolaire  $\rho$  :

$$\vec{B} = B_z(\rho) \vec{e}_z$$



Parcours extérieur :  $i_{\text{enlacée}} = 0$

Parcours intérieur :  $i_{\text{enlacée}} = 0$

Parcours à cheval sur la nappe de courant :  $i_{\text{enlacée}} = j_s \ell$

**Application du théorème d'Ampère**

Il est aisé de démontrer que le champ  $\vec{B}$  est uniforme à l'extérieur du solénoïde. Dans ce but, choisissons le parcours d'Ampère rectangulaire  $C_{A1}$ . Sur ce parcours, avec les conventions algébriques du schéma ci-dessus, la circulation du champ  $\vec{B}$  a pour expression :  $\Gamma = B_z(\rho_2)\ell - B_z(\rho_1)\ell$ . Aucun courant n'étant enlacé, cette circulation est nulle et l'on a donc un champ uniforme à l'extérieur du solénoïde :

$$B_z(\rho) = B_{0\text{ext}}, \forall \rho > R.$$

Nous pouvons faire une démonstration analogue avec le parcours d'Ampère  $C_{A2}$  et démontrer ainsi que le champ d'induction magnétique est nécessairement uniforme à l'intérieur du solénoïde :

$$B_z(\rho) = B_{0\text{int}}, \forall \rho < R$$

Choisissons maintenant un parcours d'Ampère  $C_{A3}$  à cheval sur la nappe de courant. Ce parcours enlace le courant  $j_s \ell$  et nous en déduisons par application du théorème d'Ampère :

$$(B_{0\text{int}} - B_{0\text{ext}})\ell = \mu_0 j_s \ell$$

Nous aurions pu donner directement ce résultat qui exprime tout simplement la discontinuité du champ d'induction magnétique à la traversée d'une nappe de courant de surface.

**Le champ est nul à l'infini transversal**

Nous sommes ici dans une situation où il n'existe aucun courant vers l'infini dans une direction orthogonale au solénoïde. Dans cette condition, le champ doit être nul à l'infini dans une telle direction. Sachant déjà que le champ extérieur est uniforme, nous en déduisons qu'il est uniformément nul.

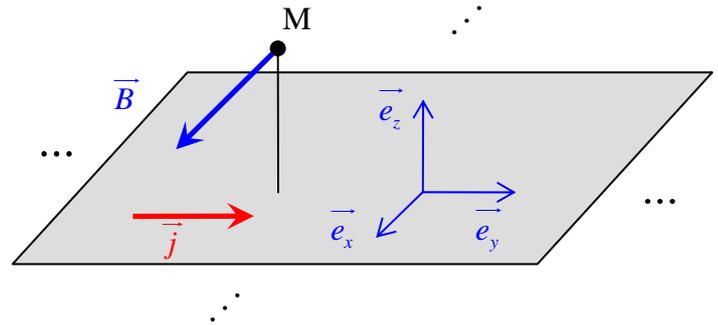
En conclusion,  $R$  étant le rayon du solénoïde :

$$\begin{cases} \rho \leq R & \vec{B}(\text{M}) = \mu_0 j_s \vec{e}_z \\ \rho \geq R & \vec{B}(\text{M}) = \vec{0} \end{cases}$$

### Distributions de courants invariantes par translations planes quelconques

#### Étude de symétrie

L'on se place en coordonnées cartésiennes orthonormées  $(x, y, z)$  et l'on considère une distribution de courants telle que les courants soient dirigés selon  $\vec{e}_y$  et invariants par translation de vecteur quelconque parallèle au plan  $(O, x, y)$ .



M étant un point quelconque de l'espace, le plan  $\{M, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  est un plan de symétrie de la distribution de courants. Il s'ensuit que la champ d'induction magnétique est orthogonal à ce plan et donc dirigé selon  $\vec{e}_x$ . De plus, l'invariance par translation implique que la valeur algébrique de  $\vec{B}$  ne dépend que de  $z$  :

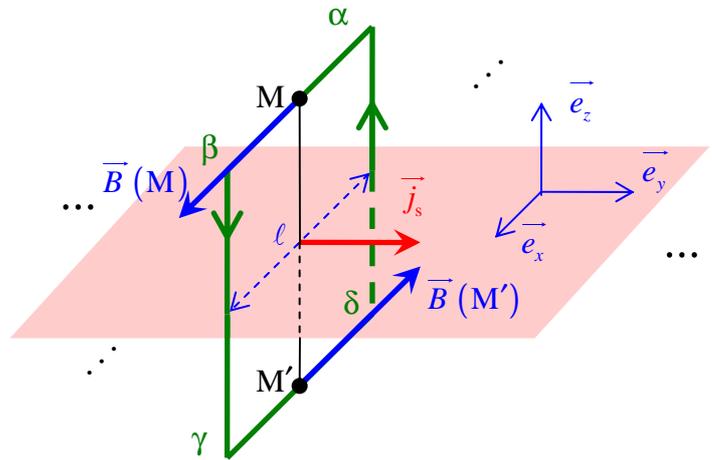
$$\vec{B}(M) = B_x(z) \vec{e}_x$$

#### Nappe de courant plane infinie et uniforme : démonstration utilisant le théorème d'Ampère

Considérons le cas d'un plan infini porteur d'une densité de courant de surface  $\vec{j}_s = j_s \vec{e}_y$  uniforme.

Il apparaît alors une symétrie supplémentaire : la nappe de courant est elle-même un plan de symétrie de la distribution de courant. En conséquence, en un point  $M'$  symétrique de  $M$ , le champ  $\vec{B}'(M')$  est antisymétrique de  $\vec{B}(M)$ . Cela revient au même de dire que la fonction  $B_x(z)$  est une fonction impaire :

$$B_x(-z) = -B_x(z)$$



Dès lors, le choix du parcours d'Ampère s'impose : nous allons considérer un parcours rectangulaire de base de longueur  $\ell$  quelconque et de hauteur  $2z$  disposé orthogonalement au courant, symétriquement de part et d'autre de la nappe de courant de telle sorte que le segment supérieur  $\alpha\beta$  se trouve à la cote  $+z$  tandis que le segment inférieur  $\gamma\delta$  se trouve à la cote  $-z$ .

Le champ d'induction magnétique étant selon  $\vec{e}_x$ , les circulations le long des segments  $\beta\gamma$  et  $\delta\alpha$  est nulle. La propriété d'antisymétrie du champ  $\vec{B}$  fait que les circulations sur  $\alpha\beta$  et sur  $\gamma\delta$  sont égales.

$$\Gamma = \oint_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\alpha\beta} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \underbrace{\int_{\beta\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_0 + \int_{\gamma\delta} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \underbrace{\int_{\delta\alpha} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_0 = 2B_x(z) \int_{\alpha\beta} d\ell = 2B_x(z) \ell$$

L'intensité enlacée étant égale à  $j_s \ell$ , nous en déduisons, par application du théorème d'Ampère, pour  $z > 0$ , la relation :  $2B_x(z) \ell = \mu_0 j_s \ell$ .

Un point de la nappe de courant appartient à la fois à une plan de symétrie et à un plan d'antisymétrie, le champ y est donc nul : pour  $z = 0$ ,  $B_x(0) = 0$ .

$$\text{Soit, finalement : } \begin{cases} \text{pour } z > 0 & \vec{B}(z) = +\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x \\ \text{pour } z = 0 & \vec{B}(0) = \vec{0} \\ \text{pour } z < 0 & \vec{B}(z) = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x \end{cases} \quad \text{ou encore : } \vec{B}(z) = \text{sgn}(z) \frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x$$

*Remarque 1 :* Dans chaque demi espace, de part et d'autre de la nappe de courant, le champ d'induction magnétique est uniforme. En particulier, le champ d'induction magnétique n'est pas nul à l'infini, ce qui peut paraître paradoxal si l'on oublie que nous sommes en présence d'un problème d'école.

*Remarque 2 :* La discontinuité de la composante tangentielle du champ d'induction magnétique à la traversée de la nappe de courant a bien pour expression  $\left(\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x - \left(-\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x\right)\right) \wedge \vec{e}_z = \mu_0 \vec{j}_s$ . Nous avons déjà démontré la nécessité de cette relation, conséquence nécessaire du théorème d'Ampère.

**Nappe de courant plane infinie et uniforme :  
démonstration utilisant l'équation locale de Maxwell-Ampère**

La démonstration étant faite que les composantes  $B_y$  et  $B_z$  du champ d'induction magnétique sont nulles et que la composante  $B_x$  ne dépend que de  $z$ , le rotationnel du champ d'induction magnétique est simplement égal à la dérivée de  $B_x$  par rapport à  $z$  :

$$\vec{B}(M) = B_x(z) \vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{dB_x}{dz} \vec{e}_y$$

De part et d'autre du plan chargé, la densité de courant  $\vec{j}$  est nulle. Nous en déduisons, d'après l'équation locale  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ , que le rotationnel du champ d'induction magnétique y est nulle en tout point et que, par conséquent, le champ d'induction magnétique est uniforme dans chacun de ces demi-espaces.

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dB_x}{dz} = 0, \quad \text{soit } B_x = C^{te}$$

La nappe de courant est un plan de symétrie de la distribution de courant, ce qui implique un champ d'induction magnétique dans tout l'espace de la forme antisymétrique :

$$\begin{cases} \vec{B} = +B_0 \vec{e}_x & \text{pour } z > 0 \\ \vec{B} = -B_0 \vec{e}_x & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

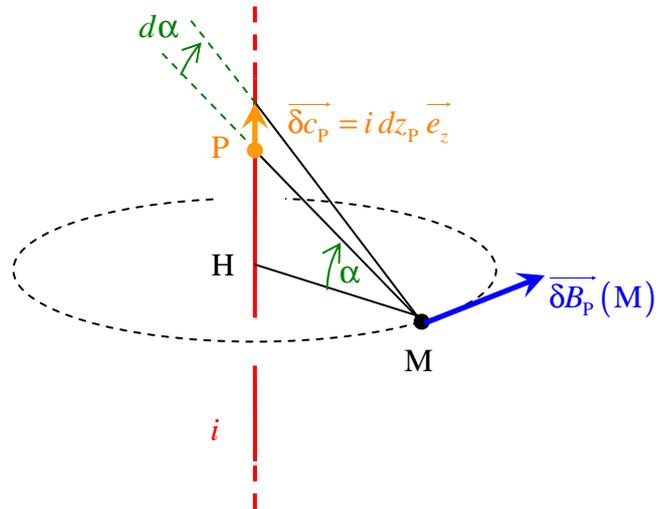
Enfin, nous connaissons l'expression de la discontinuité de la composante normale du champ à la traversée d'une surface chargée et nous en déduisons :  $\vec{B}_+ - \vec{B}_- = (+B_0 \vec{e}_x) - (-B_0 \vec{e}_x) = 2B_0 \vec{e}_x = \mu_0 j_s \vec{e}_x$ .

$$\text{Et finalement : } \begin{cases} \vec{B} = +\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x & \text{pour } z > 0 \\ \vec{B} = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \vec{e}_x & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

## 1.4. Calcul de champ d'induction magnétique par intégration vectorielle

### Fil rectiligne infini

Reprenons le problème d'école concernant un conducteur filiforme rectiligne infini est parcouru par un courant stationnaire  $i$ . Nous avons démontré l'expression du champ en utilisant le théorème d'Ampère. Sur cet exemple simple, nous pouvons déterminer le champ  $\vec{B}$  par intégration directe de la loi élémentaire de Biot et Savart. Un élément de courant  $\vec{\delta c_p} = i dz_p \vec{e}_z$  situé en un point P de l'axe Oz crée en M un champ  $\vec{\delta B_p}(M)$  :



$$\vec{\delta B_p}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \delta z_p \vec{e}_z \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \delta z_p HM}{PM^3} \vec{e}_\phi$$

H est le projeté orthogonal de M sur l'axe Oz. Posons  $HM = \rho$  et introduisons l'angle  $\alpha$  sous lequel est vu le segment HM depuis le point M. Nous avons alors  $\overline{HP} = z_p - z_H = \rho \tan \alpha$  et donc :  $\delta z_p = \rho \frac{d\alpha}{(\cos \alpha)^2}$

Nous en déduisons la contribution élémentaire au champ d'induction magnétique en M :

$$\vec{\delta B_p}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\rho}{\left(\frac{\rho}{\cos \alpha}\right)^3} \frac{\rho d\alpha}{(\cos \alpha)^2} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \cos \alpha d\alpha \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} d(\sin \alpha) \vec{e}_\phi$$

Le champ  $\vec{B}(M)$  s'en déduit en faisant varier  $\alpha$  dans l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$

$$\vec{B}(M) = \int_{P \in \text{axe Oz}} \vec{\delta B_p}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi \rho} \left[ \sin \alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} \vec{e}_\phi$$

Nous retrouvons bien entendu le résultat déjà obtenu par application du théorème d'Ampère.

### Champ sur l'axe d'une boucle circulaire de courant

Considérons un courant circulaire centré au point O et l'axe Oz orthogonal à cette boucle de courant de rayon R. Chaque élément de courant  $\vec{\delta c_p} = i R d\theta_p \vec{e}_\theta$  crée en un point M de l'axe Oz un champ d'induction magnétique élémentaire selon la loi de Biot et Savart :

$$\vec{\delta B_p}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i R d\theta_p \vec{e}_\theta \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Ce champ élémentaire n'a pas de composante orthoradiale. Tous les plans contenant l'axe Oz sont des plans d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ  $\vec{B}$  en un point M de l'axe appartient à tous ces plans : il est donc axial :  $\vec{B}(M) = B_z(z) \vec{e}_z$ .

Pour obtenir  $B_z$ , il nous suffit de projeter  $\overrightarrow{\delta B_p}(M)$  sur  $Oz$  et d'intégrer en faisant décrire au point M la boucle de courant.

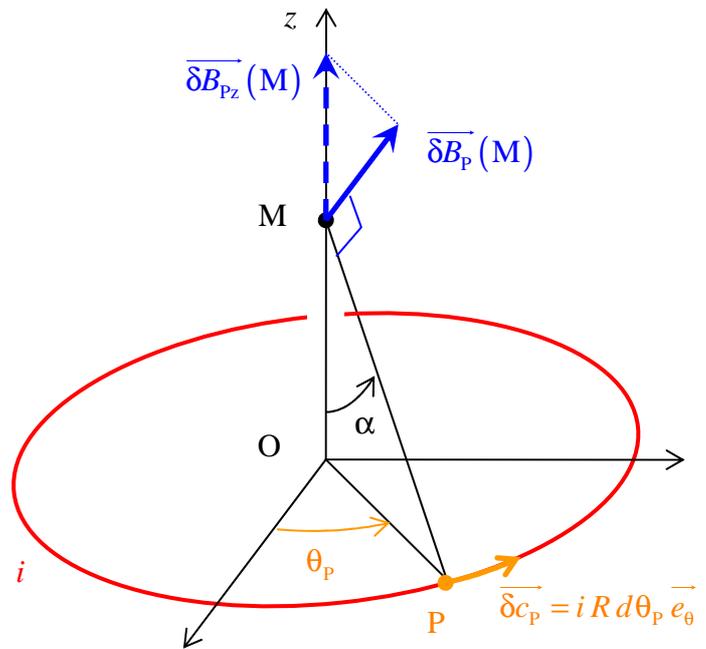
$$\delta B_z = \overrightarrow{\delta B_p}(M) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{OP}{PM^3} R d\theta_p$$

Ceci s'exprime très simplement en fonction de l'angle  $\alpha$  sous lequel le rayon de la boucle de courant est vu depuis le point M :

$$\delta B_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} (\sin\alpha)^3 d\theta_p$$

Il reste à intégrer selon  $\theta_p$ , ce qui donne :

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} (\sin\alpha)^3 \int_0^{2\pi} d\theta_p = \frac{\mu_0 i}{2R} (\sin\alpha)^3$$

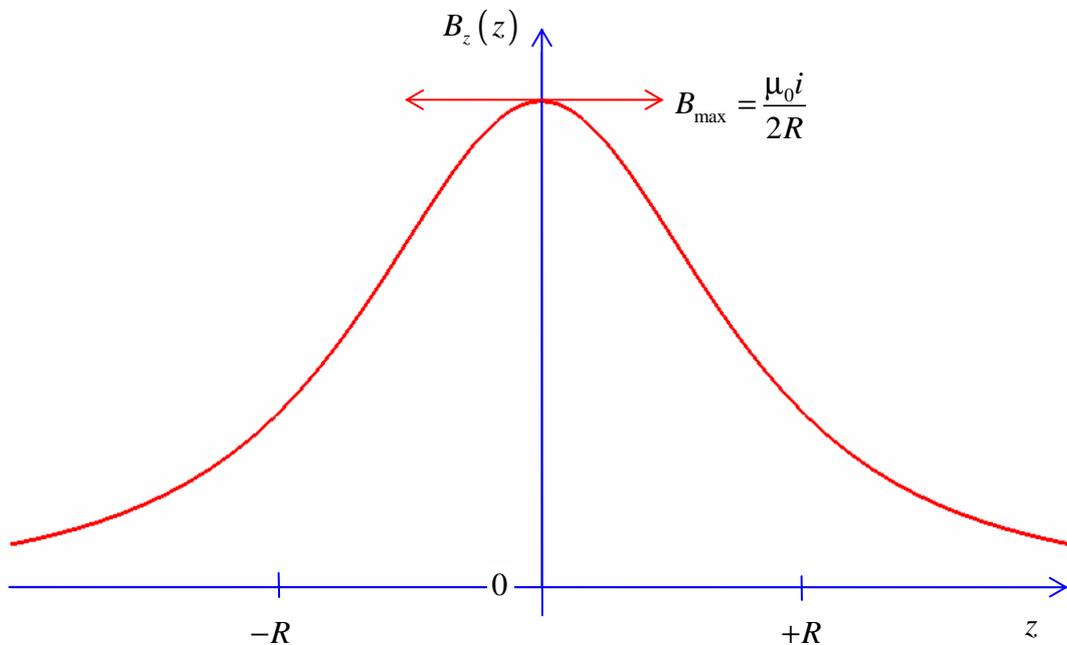


et, finalement :

$$\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z = \frac{\mu_0 i}{2R} (\sin\alpha)^3 \vec{e}_z = \frac{\mu_0 i}{2R} \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

Nous remarquons que le champ sur l'axe est maximal au centre de la spire.

Le champ décroît en  $\frac{1}{z^3}$  lorsque l'on s'éloigne sur l'axe à des distances très grandes par rapport au rayon de la spire, nous verrons plus loin dans le cours qu'il s'agit alors d'un *champ dipolaire magnétique*.



*Remarque* : Le plan de la spire est un plan de symétrie de la distribution de courant. C'est donc un plan d'antisymétrie de la carte de champ :  $B_z(-z)\vec{e}_z = -\text{sym}(B_z(+z)\vec{e}_z) = B_z(+z)\vec{e}_z$ . Nous devons effectivement mettre en évidence une fonction  $B_z(z)$  paire.

### Champ sur l'axe d'un solénoïde de dimension finie à spires jointives

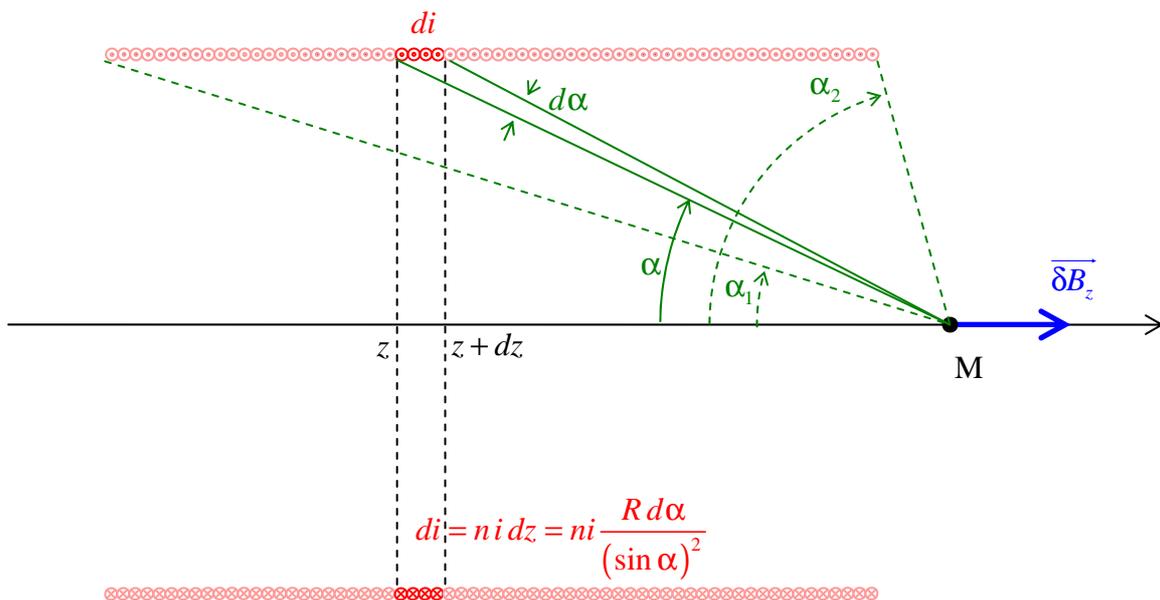
Nous nous plaçons dans le cas où le diamètre  $D$  du fil enroulé est très petit par rapport au rayon  $R$  du solénoïde de telle sorte que l'on ait une excellente approximation de la distribution de courant en assimilant le solénoïde à un ensemble de spires planes coaxiales en nombre par unité de longueur  $n = D^{-1}$ .

Pour un solénoïde de longueur  $\ell$ , le nombre total de spire est donc :  $N = n\ell = \frac{\ell}{D} \gg 1$

Nous pouvons assimiler une tranche de solénoïde d'épaisseur  $dz$  à une spire de rayon  $R$  parcourue par un courant élémentaire  $di = ni dz$ . Cette tranche de solénoïde crée en un point M de l'axe un champ

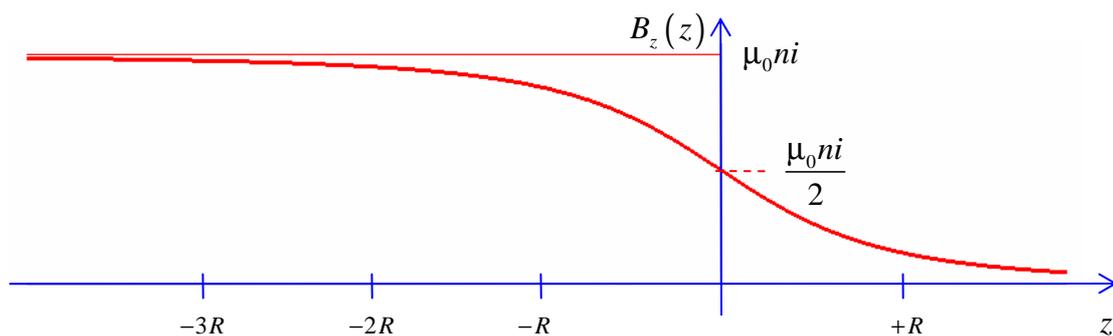
$$\delta B_z = \frac{\mu_0 di}{2R} (\sin\alpha)^3 = \frac{\mu_0 ni}{2} \sin\alpha d\alpha.$$

Cette expression s'intègre simplement en  $\alpha$  pour donner :  $\vec{B}_z = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \vec{e}_z$



*Remarque :* Nous retrouvons le cas particulier du solénoïde idéal infini en faisant  $\alpha_1 = 0$  et  $\alpha_2 = \pi$ , ce qui donne  $\vec{B}_z = \mu_0 ni \vec{e}_z$ . La grandeur  $ni$  correspond à la valeur de la densité de courant de surface  $j_s$  de la nappe de courant équivalente.

Le graphe suivant représente les variations du champ axial au voisinage de l'extrémité d'un solénoïde demi infini :  $B_z(z) = \frac{\mu_0 ni}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$ . Nous constatons que les « effets de bord » s'étendent sur des distances de l'ordre de grandeur de quelques fois le rayon du solénoïde.



## 1.5. Calcul de champ d'induction magnétique par application du théorème de superposition

### Champ au niveau de la face d'entrée d'un solénoïde demi infini

On considère un solénoïde cylindrique de section circulaire, suffisamment long pour pouvoir à une extrémité négliger les effets de bord dus à l'autre extrémité. Le solénoïde est modélisé sous la forme d'une nappe de courant de surface  $\vec{j}_s = ni\vec{e}_\varphi$ .

Peut-on déterminer la valeur du champ d'induction magnétique en un point quelconque de la face d'entrée d'un tel solénoïde ?

Le calcul intégral nous a permis de connaître la valeur du champ en un point quelconque de l'axe du solénoïde. Au centre O de la face d'entrée du solénoïde, ce champ est égal à la moitié du champ uniforme au cœur du solénoïde :

$$\vec{B}(O) = \frac{1}{2}\mu_0 j_s \vec{e}_z$$

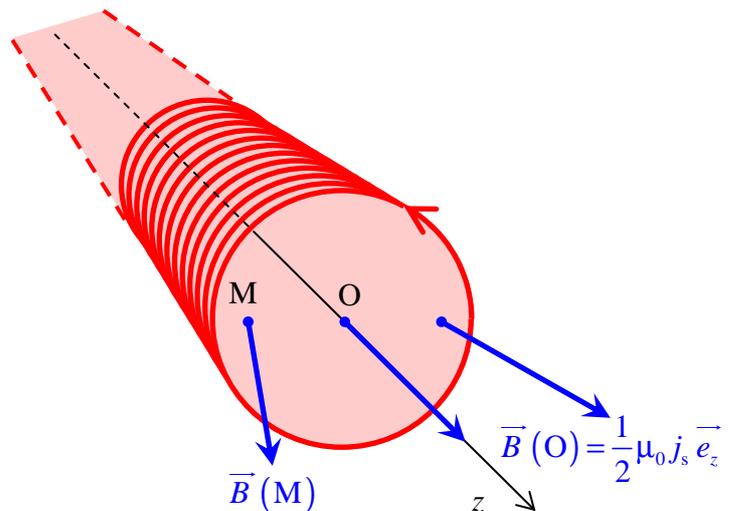
En dehors de l'axe, le calcul intégral formel n'aboutit pas, les formules sont bien trop compliquées. Avec le théorème d'Ampère nous n'avons guère plus de succès : la situation ne présente pas suffisamment de symétries pour que cette méthode soit opérationnelle. Nous allons voir qu'avec le théorème de superposition nous pouvons, à défaut de connaître le champ, d'affirmer quelques unes de ses propriétés.

#### Étude de symétrie

Nous choisissons le système de coordonnées cylindro-polaires  $(O, \rho, \varphi, z)$  axé sur le cylindre, le point origine O étant au centre de la face d'entrée du solénoïde.

Pour chaque point M, le plan  $\{M, Oz\}$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Le champ d'induction magnétique est donc contenu dans ce plan, ce qui revient à dire que le champ n'a pas de composante orthoradiale.

Par ailleurs, le problème est toujours invariant par rotation autour de Oz, ce qui implique que les composantes cylindriques du champ ne dépendent pas de l'angle  $\varphi$ .

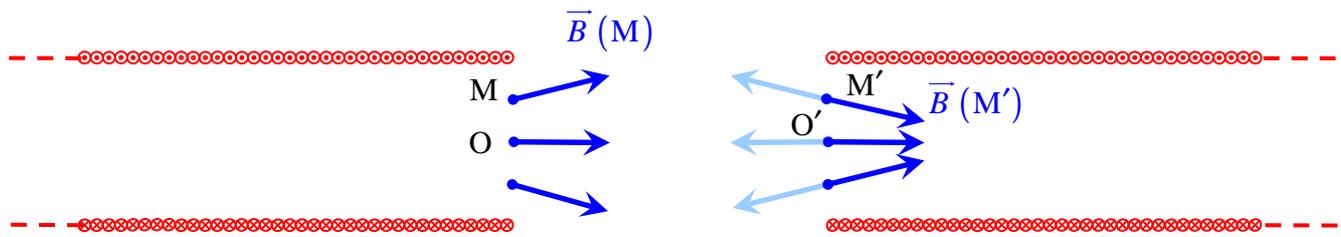


Nous en déduisons que le champ en un point M de la face d'entrée s'écrit :

$$\vec{B}(M) = B_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi) + B_z(\rho) \vec{e}_z$$

Construisons un second demi solénoïde alimenté par le même courant, symétrique du précédent par rapport à un plan orthogonal à l'axe. Nous savons qu'en deux points symétriques M et M' les champs  $\vec{B}(M)$  et  $\vec{B}(M')$  sont antisymétriques, ce qui signifie dans le cas présent :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= +B_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi) + B_z(\rho) \vec{e}_z \\ \text{sym}(\vec{B}(M)) &= +B_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi) - B_z(\rho) \vec{e}_z \\ \vec{B}(M') &= -B_\rho(\rho) \vec{e}_\rho(\varphi) + B_z(\rho) \vec{e}_z \end{aligned}$$



Quand nous rapprochons \$O'\$ de \$O\$, nous construisons un solénoïde idéal infini.

Par application du principe de superposition, nous savons donc que la somme des champs en \$M\$ et \$M'\$ observé pour les demi solénoïdes isolés doit être égale au champ intérieur uniforme du solénoïde idéal infini :

$$\vec{B}(M) + \vec{B}(M') = \mu_0 j_s \vec{e}_z = 2B_z(\rho) \vec{e}_z$$

Nous obtenons ainsi une information supplémentaire concernant le champ sur la face d'entrée d'un solénoïde demi infini : la composante axiale \$B\_z\$ du champ d'induction magnétique est la même en tout point et a pour valeur la moitié du champ d'induction magnétique intérieur du solénoïde infini :

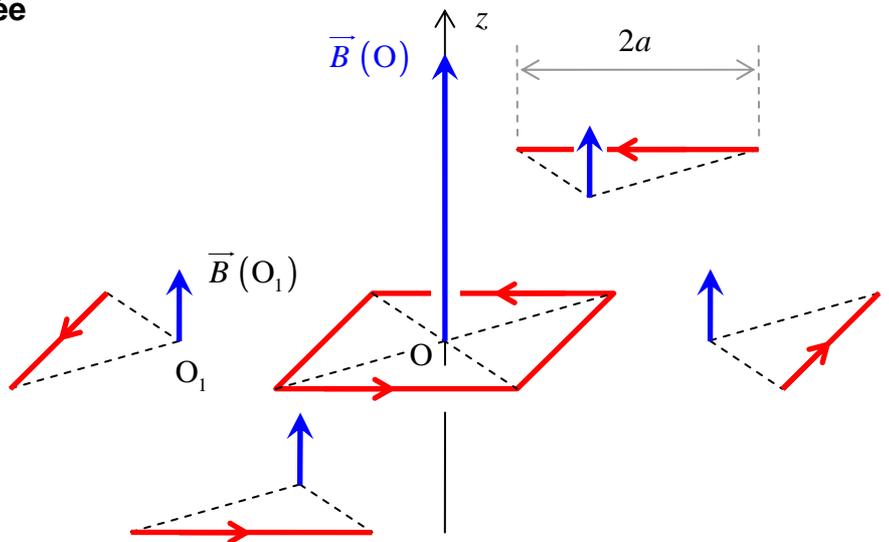
$$\vec{B}(M) = B_p(\rho) \vec{e}_\rho + \frac{1}{2} \mu_0 j_s \vec{e}_z$$

Par contre, nous n'avons pas d'information supplémentaire concernant la composante radiale \$B\_p(\rho) \vec{e}\_\rho\$.

### Champ au centre d'une spire carrée

Voyons, à titre d'exemple, cet exercice très simple si l'on fait usage à bon escient du principe de superposition en affirmant que le champ en \$O\$ est égal à la somme des champs créés par chacun des quatre cotés de la spire, chacun de longueur \$2a\$.

Cette méthode est d'autant plus efficace que, par raison de symétrie, les quatre contributions sont identiques : le champ en \$O\$ est donc égal à quatre fois le champ créé par un seul coté du carré.



Nous avons déjà fait le calcul, par intégration, du champ créé par un fil rectiligne, il nous suffit d'adapter les notations et, en particulier, de faire varier l'angle \$\alpha\$ non plus de \$-\pi/2\$ à \$+\pi/2\$ mais seulement de \$-\pi/4\$ à \$+\pi/4\$ :

$$\vec{B}(O_1) = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} \cos\alpha d\alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[ \sin\alpha \right]_{-\pi/4}^{+\pi/4} \vec{e}_z = \frac{\sqrt{2}\mu_0 i}{4\pi a} \vec{e}_z$$

Ceci nous conduit à l'expression du champ d'induction magnétique au centre de la spire carrée :

$$\vec{B}(O) = 4\vec{B}(O_1) = \sqrt{2} \frac{\mu_0 i}{\pi a} \vec{e}_z$$