MAGNÉTOSTATIQUE

Chapitre 2

Potentiel vecteur

2.1. Inexistence des charges magnétiques

Le champ d'induction magnétique est à flux conservatif

Voici une propriété fondamentale du champ d'induction magnétique :

Le flux du champ d'induction magnétique à travers une surface fermée est toujours nul. On dit encore que le champ d'induction magnétique est à flux conservatif.

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{n_{\text{ext}}}\, dS = 0$$

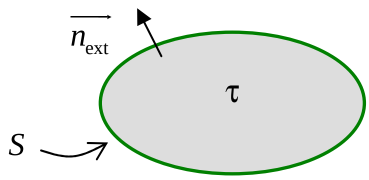
Il s'agit en quelque sorte de l'équivalent magnétique du théorème de Gauss, à ceci près qu'il n'existe pas de charges magnétiques.

Remarque : À la différence du théorème d'Ampère qui n'a de sens que dans le cadre de l'ARQS, cette propriété du champ d'induction magnétique est vraie dans la plus grande généralité. Il s'agit d'une loi fondamentale de l'électromagnétisme.

Expression locale de la conservation du flux de $\vec{B}$

Le théorème de Green-Ostrogradski stipule que le flux sortant d'un champ de vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ de vecteur étendue au volume intérieur à cette surface.

$$\phi_{\vec{B}} = \oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{n_{\text{ext}}}\, \delta S = \iiint_\tau \operatorname{div} \vec{B}\, \delta\tau = 0$$



Le flux du champ d'induction magnétique à travers une surface fermée étant toujours nul, nous en déduisons, cette propriété étant vérifiée quel que soit τ, que la divergence du champ d'induction magnétique est nulle en tout point de l'espace où le champ est défini.

Nous aboutissons ainsi à l'équation suivante, expression locale de la loi de conservation du flux de l'induction magnétique :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

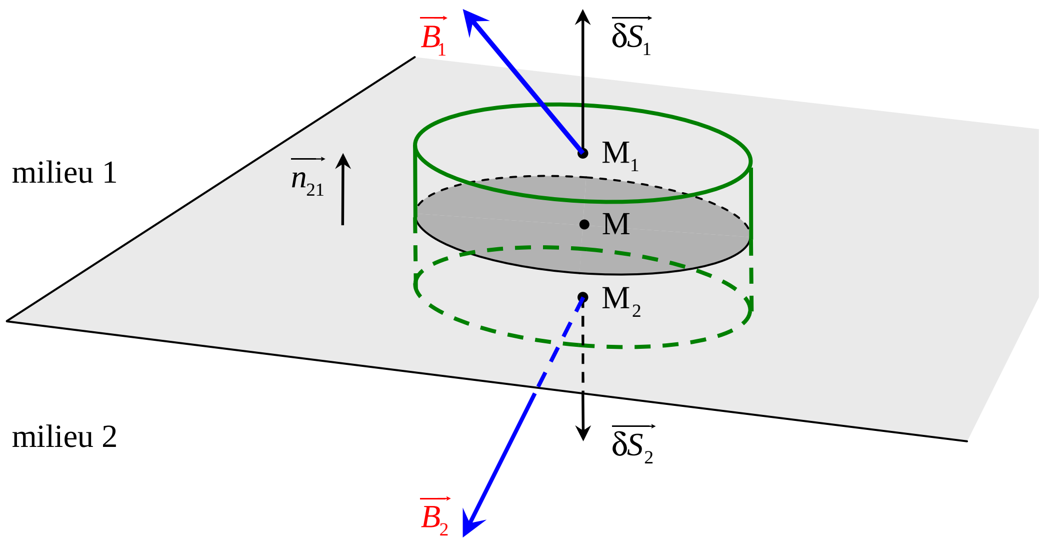
Remarque : Nous sommes ici dans le cadre de la magnétostatique, mais retenons d'ores et déjà que cette équation locale est une loi générale de l'électromagnétisme. Aucun nom de physicien illustre ne lui étant attribuée, nous appellerons cette équation « *Équation de Maxwell-flux* » : $\operatorname{div}\vec{B}(\mathrm{M}, t) = 0 \ \forall \mathrm{M}, \forall t$

Discontinuité du champ magnétique à la traversée d'un nappe de courant

Soit un point M d'une surface que nous supposerons localement plane, séparant deux milieux 1 et 2. Cette surface est le siège d'une nappe de courant caractérisée localement par le vecteur densité de courant de surface $\vec{j_s}$.

Dans le but d'exprimer la conservation du flux de $\vec{B}$, nous allons construire une surface fermée autour du point M en imaginant une boîte cylindrique ayant pour « couvercles » les surfaces élémentaires δS_1 et δS_2 immédiatement voisines de δS dans le milieu 1 et dans le milieu 2. Dans la limite considérée, la surface latérale de la boîte cylindrique a une mesure nulle et le flux sortant du champ électrique à travers la surface fermée se réduit aux deux seuls flux à travers les surfaces élémentaires δS_1 et δS_2.

Nous noterons $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$ les champs d'induction magnétique dans les milieux 1 et 2 aux points M_1 et M_2 immédiatement voisins de M.



Dans la limite où les points M_1 et M_2 tendent vers M, la conservation du flux de $\vec{B}$ s'écrit ici, en introduisant le vecteur unitaire $\vec{n_{21}}$ en M dirigé du milieu 2 vers le milieu 1 :

$$\delta\phi_{\vec{B}} = \vec{B_1}\cdot\vec{\delta S_1} + \vec{B_2}\cdot\vec{\delta S_2} = \left(\vec{B_1} - \vec{B_2}\right)\cdot\vec{n_{21}}\,\delta S = 0$$

Nous en déduisons que la composante normale du champ d'induction magnétique est nécessairement continue au franchissement d'une nappe de courant : $\left(\vec{B_1} - \vec{B_2}\right)\cdot\vec{n_{21}} = 0$

Nous avons déjà démontré, comme conséquence du théorème d'Ampère, le fait que la composante tangentielle du champ d'induction magnétique parallèle au courant de surface est nécessairement continue tandis que la composante tangentielle du champ d'induction magnétique orthogonale au courant de surface est quant à elle nécessairement discontinue, ce qui se traduisait par la relation :

$$\left(\vec{B_1} - \vec{B_2}\right)\wedge\vec{n_{21}} = \mu_0\,\vec{j_s}$$

Les deux relations précédentes sont équivalentes à la relation vectorielle suivante traduisant à la fois le théorème d'Ampère et la conservation du flux de l'induction magnétique au voisinage d'une surface siège d'une nappe de courant :

$$\vec{B_1} - \vec{B_2} = \mu_0 \, \vec{j_s} \wedge \vec{n_{12}}$$

Nous appellerons cette relation « relation de passage » du champ d'induction magnétique au voisinage d'une nappe de courant.

2.2. Définition du potentiel vecteur

Le champ d'induction magnétique dérive d'un potentiel vecteur

Théorème d'analyse vectorielle

Tout champ de vecteur $\vec{v}\left(\vec{r}\right)$ à flux conservatif, c'est-à-dire tel que $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ en tout point de l'espace, est un champ rotationnel : il existe au moins une fonction vectorielle $\vec{w}\left(\vec{r}\right)$ telle que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{w}$.

Cette fonction vectorielle $\vec{w}$ n'est pas définie de façon univoque. En effet, le rotationnel du gradient d'une fonction scalaire $f\left(\vec{r}\right)$ quelconque étant identiquement nul, le vecteur $\vec{w'} = \vec{w} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$ définit le même champ de vecteur $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{w} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{w} + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{w}$$

Définition

Cette propriété mathématique générale, appliquée au champ d'induction magnétique qui est un champ de vecteurs à flux conservatif, définit le potentiel vecteur $\vec{A}$ du champ $\vec{B}$. On dit que le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ dérive du potentiel vecteur $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$$

Condition de jauge

Le potentiel vecteur n'est défini « qu'à un gradient près ». Nous pouvons lever cette indétermination en imposant au potentiel vecteur d'être lui-même un champ de vecteur à flux conservatif. Cette condition supplémentaire s'appelle la *condition de jauge de Coulomb*, elle s'écrit :

$$\mathrm{div}\vec{A} = 0$$

Cette condition de jauge étant vérifiée, il reste que le champ magnétique est défini par les dérivées du potentiel vecteur : ce dernier n'est donc défini qu'à une constante additive vectorielle près.

Chaque fois que cela sera possible, nous privilégierons le choix d'un potentiel vecteur nul à l'infini. Toutefois, nous avions le même problème avec le potentiel scalaire en électrostatique, cela ne sera pas possible dans le cas de certains « problèmes d'école » où l'on envisage la présence de courants à l'infini.

Équation de Poisson magnétostatique

Laplacien vectoriel

Nous utilisons l'identité suivante vérifiée par toute fonction vectorielle des coordonnées d'espace pourvu qu'elle soit deux fois dérivable :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{v}\right) - \vec{\Delta}\vec{v}$$

Dans cette relation $\vec{\Delta}\vec{v}$ s'appelle le « *laplacien vectoriel* » de la fonction vectorielle $\vec{v}$. Par définition, le laplacien vectoriel d'un vecteur $\vec{v}$ a pour composantes cartésiennes les laplaciens scalaires Δv_x, Δv_y et Δv_z des composantes v_x, v_y et v_z du vecteur $\vec{v}$:

$$\vec{\Delta}\vec{v} = \begin{bmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Équations de Poisson

Rappelons l'équation de Poisson $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, satisfaite par le potentiel scalaire électrostatique.

Le potentiel vecteur magnétostatique obéit à une loi formellement identique, pourvu qu'il soit défini dans le choix de jauge de Coulomb.

Reprenons l'expression locale du théorème d'Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$ et exprimons cette loi locale en fonction du potentiel vecteur. Cela s'écrit : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) - \vec{\Delta}\vec{A} = \mu_0\,\vec{j}$.

Si l'on se place dans le cadre de la condition de jauge de Coulomb, $\text{div}\,\vec{A} = 0$, nous obtenons l'*équation de Poisson magnétostatique* :

$$\vec{\Delta}\vec{A} = -\mu_0\,\vec{j}$$

Solutions de l'équation de Poisson

Nous savons que la fonction scalaire $V(\text{M}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint_{\text{P}\in\tau} \dfrac{\rho(\text{P})\,\delta\tau}{\text{MP}}$ est solution de l'équation de Poisson électrostatique $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ dans l'hypothèse où l'origine des potentiels est prise à l'infini.

Nous admettrons, par analogie et sans démonstration, l'expression suivante du potentiel vecteur comme solution de l'équation de Poisson magnétostatique, dans le cadre de la jauge de Coulomb, le potentiel vecteur étant choisi nul à l'infini :

$$\vec{A}(\text{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\text{P}\in\tau} \frac{\vec{j}(\text{P})\,\delta\tau}{\text{MP}}$$

Remarque : dans le cas où tous les éléments de courants ont même direction, le potentiel vecteur ainsi défini aura cette même direction. En particulier, ce sera le cas de toute distribution de courant rectiligne.

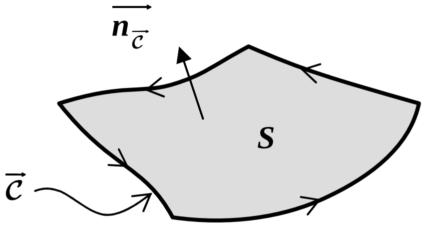
Circulation du potentiel vecteur

Rappelons le théorème de Stokes : la circulation d'un champ de vecteur sur un parcours fermé orienté est égale au flux du rotationnel de ce champ de vecteur à travers une surface s'appuyant sur ce contour, la surface étant orientée conformément à l'orientation du parcours.

Appliqué au potentiel vecteur, le théorème de Stokes permet d'affirmer que :

La circulation du potentiel vecteur $\vec{A}$ le long d'un parcours fermé est égale au flux de son rotationnel, c'est-à-dire au flux de l'induction magnétique $\vec{B}$ à travers toute surface s'appuyant sur ce contour.

$$\oint_{\vec{\mathcal{C}}} \vec{A} \cdot \vec{\delta\ell} = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n_{\vec{\mathcal{C}}}}\, \delta S$$



Remarque : le champ d'induction magnétique étant à flux conservatif, le choix de la surface s'appuyant sur le contour est indifférent. Nous pouvons tout aussi bien parler du flux de $\vec{B}$ à travers la courbe $\vec{\mathcal{C}}$ orientée.

Symétries du potentiel vecteur

Le potentiel vecteur est un « vrai » vecteur, un vecteur polaire dont le sens a une signification indépendante de la convention mathématique du « trièdre direct ».

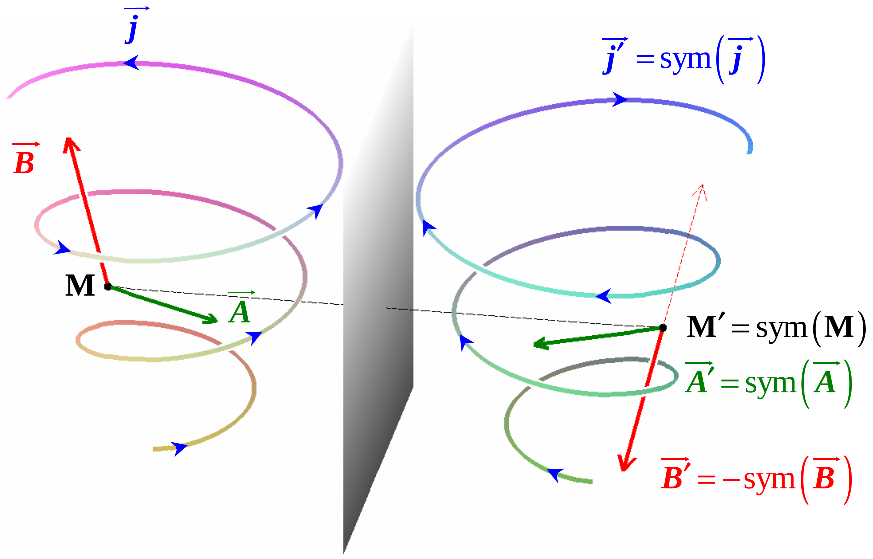
Il s'ensuit que le potentiel vecteur obéit aux mêmes règles de symétrie que le champ électrique. Retenons en particulier les théorèmes suivants :

S'il existe un plan de symétrie de la distribution de courant, le potentiel vecteur $\vec{A'}$ au point M′ symétrique du point M est le symétrique par rapport à ce plan du potentiel vecteur $\vec{A}$ en M.

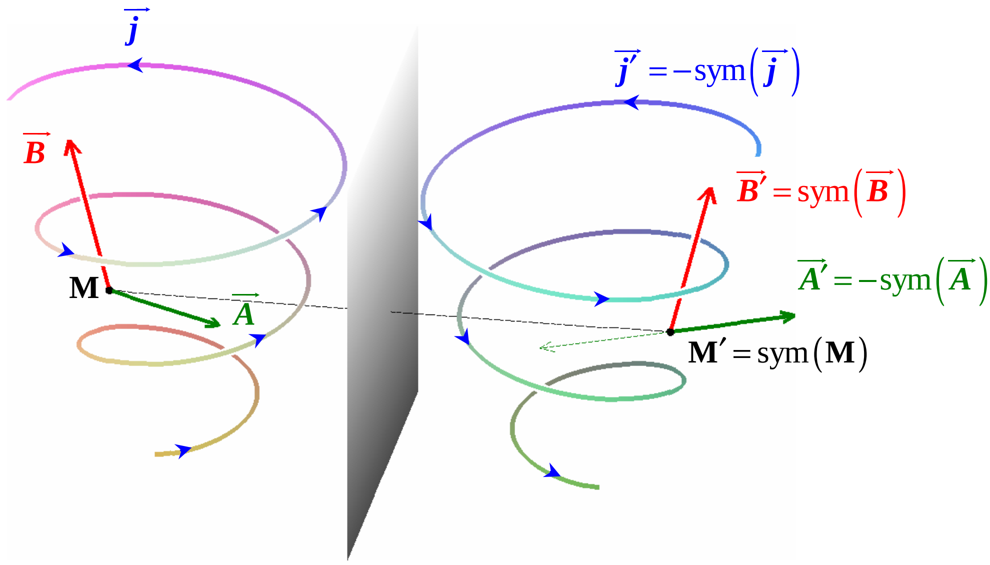
Corollaire : Pour un point P appartenant au plan de symétrie, le potentiel vecteur doit être son propre symétrique par rapport à ce plan, c'est-à-dire qu'il doit être contenu dans ce plan.

S'il existe un plan de d'antisymétrie de la distribution de courant, le potentiel vecteur $\vec{A'}$ au point M′ symétrique du point M est l'opposé du symétrique par rapport à ce plan du potentiel vecteur $\vec{A}$ en M.

Corollaire : Pour un point P appartenant au plan de d'antisymétrie, le potentiel vecteur doit être l'opposé de son propre symétrique par rapport à ce plan, c'est-à-dire qu'il doit être orthogonal à ce plan.



Distribution de courant symétrique $\Rightarrow \begin{cases} \text{Potentiel vecteur symétrique} \\ \text{Induction magnétique antisymétrique} \end{cases}$



Distribution de courant antisymétrique $\Rightarrow \begin{cases} \text{Potentiel vecteur antisymétrique} \\ \text{Induction magnétique symétrique} \end{cases}$

2.3. Énergie magnétostatique

Énergie magnétostatique d'une distribution de courant

Rappelons l'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une répartition continue de charges électriques :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{toutes les}\\ \text{charges}}} V(\mathrm{M})\,\delta q$$

Nous admettrons, par analogie et sans démonstration, l'expression de l'énergie magnétique d'un ensemble de courants :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{tous les}\\ \text{courants}}} \vec{A}(\mathrm{M})\cdot\overrightarrow{\delta c}$$

Remarque :

Dans le cas de courants de volume l'intégrale est une intégrale de volume étendue au volume τ où se trouvent confinés les courants :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\iiint_{\mathrm{M}\in\tau} \overrightarrow{j(\mathrm{M})}\cdot\overrightarrow{A(\mathrm{M})}\,\delta\tau$$

Dans le cas de courants de surface l'intégrale est une intégrale de surface étendue à la surface S où sont confinés les courants :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\iint_{\mathrm{M}\in S} \overrightarrow{j_s(\mathrm{M})}\cdot\overrightarrow{A(\mathrm{M})}\,\delta S$$

Dans le cas de courants filiformes, l'intégrale est une intégrale curviligne étendue aux fils $\mathcal{C}$ porteurs des courants :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}\in\mathcal{C}} i\,\overrightarrow{A(\mathrm{M})}\cdot\overrightarrow{\delta\ell}$$

Attention ! Ces relations intégrales ne sont valables que dans le cas usuel où les potentiels $\vec{A}$ et V sont choisis de valeur nulle à l'infini.

Énergie du champ d'induction magnétique

L'énergie magnétique d'un ensemble de courants —la même énergie déjà définie ci-dessus— peut être interprétée comme une énergie associée au champ d'induction magnétique. Cette énergie est localisée là où le champ $\vec{B}$ n'est pas nul : elle s'exprime comme l'intégrale étendue à tout l'espace d'une densité volumique d'énergie magnétique u_{m} proportionnelle au carré scalaire du champ $\vec{B}$.

Nous admettrons, sans démonstration, l'expression de cette énergie magnétostatique :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \iiint_{\substack{\text{tout}\\ \text{l'espace}}} \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2\,\delta\tau = \iiint_{\substack{\text{tout}\\ \text{l'espace}}} u_{\mathrm{m}}\,\delta\tau \qquad \text{avec} \qquad u_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$$

Analogie formelle électrostatique ↔ magnétostatique

L'analogie avec l'énergie électrostatique est patente : celle-ci est localisée dans tout l'espace où existe un champ électrique et dont la densité volumique u_{e} est proportionnelle au carré scalaire du champ $\vec{E}$: $u_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2$.

Comme il se doit, dans cette analogie, il faut faire correspondre la permittivité et l'inverse de la perméabilité :

$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$$

$$\varepsilon_0 \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0}$$

$$u_{\mathrm{e}} \leftrightarrow u_{\mathrm{m}}$$

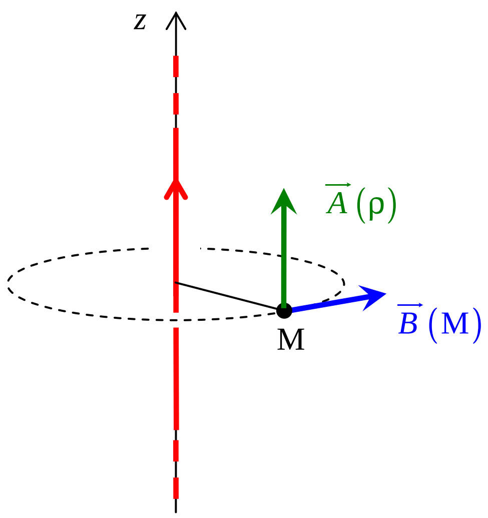
Note : Interprétation physique des potentiels

En électrostatique, nous avons donné un sens physique au potentiel scalaire en remarquant que $q(V_2 - V_1)$ correspond à *l'énergie* qu'il faut fournir à une charge q pour la déplacer d'un endroit où le potentiel scalaire est égal à V_1 en un autre endroit où le potentiel scalaire est égal à V_2.

De la même façon, nous pouvons donner un sens physique au potentiel vecteur. L'expression $q(\vec{A}_2 - \vec{A}_1)$ correspond à *la quantité de mouvement* qu'il faut fournir à une charge q pour la déplacer d'un endroit où le potentiel vecteur est égal à $\vec{A}_1$ en un autre endroit où le potentiel vecteur est égal à $\vec{A}_2$.

2.4. Quelques exemples simples

Fil rectiligne infini



Nous sommes ici dans le cas d'un problème d'école pour lequel nous avons introduit un courant qui part sans retour à l'infini : il sera impossible de choisir le potentiel vecteur nul à l'infini et, par conséquent, le calcul direct du potentiel vecteur par intégration de contributions élémentaires est impossible.

Nous devons préalablement calculer le champ d'induction magnétique, ce que nous avons fait au chapitre précédent. En choisissant un système de coordonnées cylindrique (ρ, φ, z) ayant pour axe Oz le fil orienté par le courant i, le champ d'induction magnétique a pour expression :

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\vec{e_\varphi}$$

Étude de symétrie

Le plan passant par M et orthogonal au fil est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant. Nous pouvons donc affirmer *a priori* que le potentiel vecteur en M est orthogonal à ce plan, c'est-à-dire orienté selon Oz : $\vec{A}(\mathrm{M}) = A_z\vec{e_z}$.

Le problème étant invariant par rotation quelconque autour de l'axe Oz et par translation quelconque selon la direction de l'axe Oz, nous en déduisons que la valeur algébrique A_z ne dépend que de la distance ρ du point M à l'axe Oz : $\vec{A}(\mathrm{M}) = A_z(\rho)\vec{e_z}$.

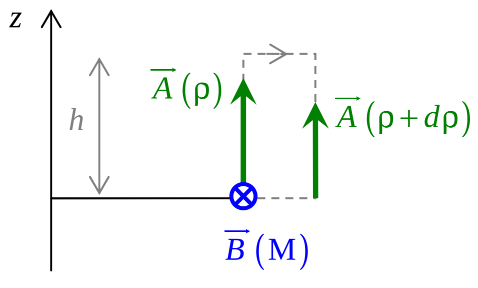
Intégration du champ

Si l'on dispose de l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e_\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\vec{e_\varphi} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e_z}$$

Nous pouvons en déduire immédiatement que la relation entre champ et potentiel qui s'écrit dans le cas général $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ prend ici la forme plus simple :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = -\frac{dA_z}{d\rho}\vec{e_\varphi} \qquad \text{soit} \qquad B_\varphi = -\frac{dA_z}{d\rho}$$



Si cette expression ne nous est pas donnée, nous trouvons la relation entre $\vec{B}$ et $\vec{A}$ en écrivant que la circulation de $\vec{A}$ sur un parcours fermé est égale au flux de $\vec{B}$ à travers ce contour. Nous choisissons pour contour un rectangle passant par M, de hauteur h et de petit côté $d\rho$, orthogonal au champ $\vec{B}$. La circulation de $\vec{A}$ sur un tel parcours orienté de telle sorte que le flux de $\vec{B}$ soit positif, a pour expression :

$$\Gamma_{\vec{A}} = A_z(\rho)h - A_z(\rho + d\rho)h = -h\frac{dA_z}{d\rho}d\rho$$

Le flux de $\vec{B}$ à travers ce contour élémentaire a pour expression : $d\phi_{\vec{B}} = B_\varphi\, h\, d\rho$ et nous en déduisons la même relation : $B_\varphi = -\dfrac{dA_z}{d\rho}$

Par intégration, nous obtenons :

$$A_z(\rho) = A_z(\rho_0) - \int_{\rho_0}^{\rho} B_\varphi(\rho')\,d\rho' = A_z(\rho_0) - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\mu_0\, i}{2\pi\rho'}\,d\rho' = A_z(\rho_0) - \frac{\mu_0\, i}{2\pi\rho'} \ln\frac{\rho}{\rho_0}$$

La valeur du potentiel à la distance ρ_0 du fil peut être choisie arbitrairement.

Conducteur cylindrique infini parcouru par un courant axial uniforme en volume

Nous noterons R le rayon du conducteur et i l'intensité du courant. Les éléments de symétries sont les mêmes que dans le cas du courant filiforme rectiligne traité précédemment. Nous savons donc *a priori* que le potentiel vecteur est colinéaire au courant, dirigé selon Oz : $\vec{A}(\mathrm{M}) = A_z(\rho)\,\vec{e_z}$.

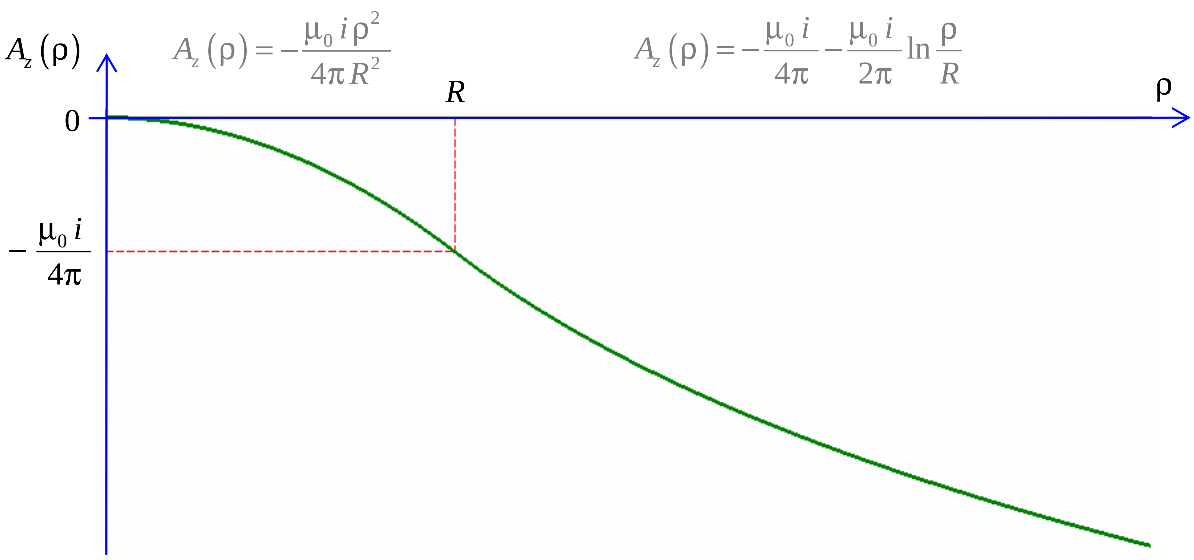
De la même façon que précédemment, nous aurons : $A_z(\rho) = A_z(\rho_0) - \int_{\rho_0}^{\rho} B_\varphi(\rho')\,d\rho'$

Nous choisissons arbitrairement un potentiel nul sur l'axe du fil et alors : $A_z(\rho) = -\int_{0}^{\rho} B_\varphi(\rho')\,d\rho'$

Il nous faut alors distinguer deux cas, selon que le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur du fil :

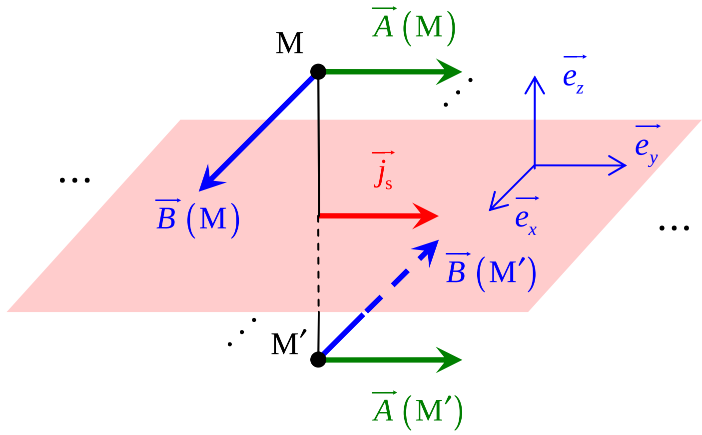
$$\begin{cases} \rho \le R & \vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0\, i\,\rho}{2\pi R^2}\,\vec{e_\varphi} & A_z(\rho) = -\displaystyle\int_0^{\rho} \frac{\mu_0\, i\,\rho'}{2\pi R^2}\,d\rho' = -\frac{\mu_0\, i}{2\pi R^2}\left[\frac{\rho'^2}{2}\right]_0^{\rho} = -\frac{\mu_0\, i\,\rho^2}{4\pi R^2} \\ \rho \ge R & \vec{B}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mu_0\, i}{2\pi\rho}\,\vec{e_\varphi} & A_z(\rho) = A_z(R) - \displaystyle\int_R^{\rho} \frac{\mu_0\, i}{2\pi\rho'}\,d\rho' = -\frac{\mu_0\, i}{4\pi} - \frac{\mu_0\, i}{2\pi}\ln\frac{\rho}{R} \end{cases}$$

Attention ! Si le choix de l'origine du potentiel vecteur est arbitraire, ce choix est fait une fois pour toutes et le potentiel vecteur doit nécessairement varier continûment dans l'espace. Pour notre exemple, l'expression du potentiel à la surface du fil, pour $\rho = R$, est la même pour $\rho \to R^-$ et pour $\rho \to R^+$.



Nappe plane de courant de surface uniforme

Encore un problème d'école ! Les courants partant à l'infini sans retour nous interdisent de choisir un potentiel vecteur nul à l'infini.



Étude de symétrie

Nous choisissons un système de coordonnées cartésiennes dont l'axe Oz est orthogonal à la nappe de courant et tel que la densité de courant de surface est orientée par l'axe O*y*.

Tout plan passant par un point M quelconque et orthogonal au courant est un plan d'antisymétrie de la distribution des courants.

Le potentiel vecteur en M est donc orthogonal à ce plan et donc colinéaire au courant : $\vec{A}(\mathrm{M}) = A_y\,\vec{e}_y$.

Le problème étant invariant par translation quelconque parallèle au plan *x*O*y*, nous pouvons donc affirmer que la composante A_y n'est fonction que de *z* : $\vec{A}(\mathrm{M}) = A_y(z)\,\vec{e}_y$.

Par ailleurs, le plan *x*O*y* contenant la nappe de courant est un plan de symétrie du problème et le potentiel vecteur en M', symétrique de M par rapport à ce plan, est le symétrique du potentiel vecteur en M. Cela revient à affirmer *a priori* que la fonction $A_y(z)$ est paire.

Intégration du champ

Dans de telles conditions de symétrie, la relation $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ s'écrit :

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{d}{dz} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ A_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{dA_y}{dz}\,\vec{e}_x \qquad \text{soit} \qquad A_y(z) = A_y(0) - \int_0^z B_x\,dz$$

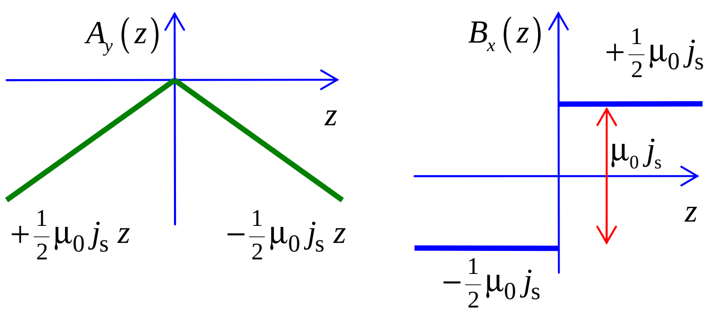
Nous avons établi l'expression de $\vec{B}$ au chapitre précédent et nous en déduisons :

$$\begin{cases} \text{pour } z>0 \quad \vec{B}(z) = +\dfrac{\mu_0 j_s}{2}\,\vec{e}_x \qquad A_y(z) = A_y(0) - \displaystyle\int_0^z \frac{\mu_0 j_s}{2}\,dz = A_y(0) - \frac{\mu_0 j_s}{2}\,z \\ \text{pour } z<0 \quad \vec{B}(z) = -\dfrac{\mu_0 j_s}{2}\,\vec{e}_x \qquad A_y(z) = A_y(0) + \displaystyle\int_0^z \frac{\mu_0 j_s}{2}\,dz = A_y(0) + \frac{\mu_0 j_s}{2}\,z \end{cases}$$

Et donc, finalement, en choisissant l'origine du potentiel dans le plan de la nappe de courant :

$$\vec{A} = -\frac{\mu_0 j_s}{2}|z|\,\vec{e}_y = -\frac{\mu_0 \vec{j}_s}{2}|z|$$

Remarque : Le potentiel vecteur est une fonction continue à dérivée discontinue. Cette discontinuité de la dérivée correspond à la discontinuité $\mu_0 j_s$ du champ d'induction magnétique à la traversée d'une nappe de courant. On remarquera l'analogie avec le cas en électrostatique de la discontinuité du champ électrique à la traversée d'une surface plane chargée.



Nappe de courant cylindrique (solénoïde idéal)

Étude de symétrie

Nous avons déjà établi, pour une nappe de courant de surface orthoradiale $\vec{j_s} = j_s\,\vec{e_\varphi}$, l'expression du champ d'induction magnétique qui est axial et uniforme à l'intérieur du solénoïde et nul à l'extérieur :

$$\begin{cases} \rho < R & \vec{B} = \mu_0 j_s\,\vec{e_z} = \mu_0 n\, i\,\vec{e_z} \\ \rho > R & \vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

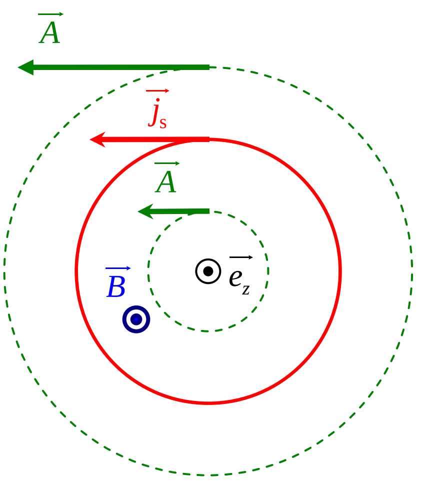
En posant $j_s = n\,i$ où n est le nombre de spires par unité de longueur et i l'intensité dans chaque spire.

Le plan défini par un point M quelconque et l'axe Oz du solénoïde est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant : le potentiel vecteur en M est donc nécessairement orthogonal à ce plan, c'est-à-dire orthoradial : $\vec{A} = A_\varphi\,\vec{e_\varphi}$.

Le problème étant invariant par rotation quelconque autour de l'axe Oz et par translation quelconque le long de ce même axe, nous en déduisons que la composante A_φ au point M ne dépend que de la distance ρ du point M à l'axe Oz : $\vec{A} = A_\varphi(\rho)\,\vec{e_\varphi}$.

Circulation du potentiel vecteur

Nous pouvons très rapidement obtenir l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}$ dans la condition de jauge de Coulomb en écrivant que la circulation du potentiel vecteur le long d'un parcours fermé est égale au flux du champ d'induction magnétique à travers une surface s'appuyant sur ce contour.



Choisissons pour parcours un cercle $\mathcal{C}$ centré sur l'axe du solénoïde et orthogonal à cet axe. Dans tous les cas, pour un cercle de rayon ρ, la circulation du potentiel vecteur s'exprimera simplement :

$$\Gamma_{\vec{A}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}\cdot\vec{d\ell} = A_\varphi(\rho)\oint_{\mathcal{C}} d\ell = 2\pi\rho\,A_\varphi(\rho)$$

Si le rayon ρ du cercle $\mathcal{C}$ est inférieur au rayon R du solénoïde, le flux de $\vec{B}$ a pour expression $\phi_{\vec{B}} = B_z \times \pi\rho^2 = \pi\rho^2\mu_0 j_s$ tandis que dans le cas contraire, le flux est indépendant de ρ et prend sa valeur maximale $\phi_{\vec{B}\,\max} = \pi R^2\mu_0 j_s$. La relation $\Gamma_{\vec{A}} = \phi_{\vec{B}}$ nous conduit donc à l'expression de $\vec{A}$:

$$\begin{cases} \rho < R & \vec{A} = \dfrac{1}{2}\mu_0 j_s\,\rho\,\vec{e_\varphi} \\ \rho > R & \vec{A} = \dfrac{1}{2}\mu_0 j_s \dfrac{R^2}{\rho}\,\vec{e_\varphi} \end{cases}$$

Le potentiel vecteur est nul sur l'axe du solénoïde, maximal à la surface du solénoïde et tend vers une valeur nulle à l'infini. Nous avons affaire ici à une situation plus réaliste que dans les exemples précédents : aucun courant ne part à l'infini sans retour.

Énergie magnétique linéique

L'énergie du solénoïde infini est bien sûr infinie. Nous allons donc considérer une tranche de solénoïde infini de longueur ℓ pour laquelle l'énergie magnétique, nous le verrons, est finie.

La densité volumique d'énergie magnétique $u_{\mathrm{m}} = \dfrac{\overrightarrow{B}^2}{2\mu_0}$ est uniforme à l'intérieur du solénoïde et nulle à l'extérieur. L'énergie magnétique est donc égale à la densité volumique d'énergie multipliée par le volume de la tranche de solénoïde considérée :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \times \pi R^2 \ell = \frac{1}{2}\pi\mu_0 j_{\mathrm{s}}^2 R^2 \ell$$

Remarque : Considérons le solénoïde comme étant constitué de spires jointives, à raison de n spires par unité de longueur, parcourues par un courant d'intensité i de telle sorte que la nappe de courant équivalente soit telle que $j_{\mathrm{s}} = n\,i$. L'énergie magnétique peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\left(\pi\mu_0 n^2 R^2 \ell\right) i^2 = \frac{1}{2} L\, i^2$$

Nous avons déjà défini, en électricité des régimes quasi stationnaires, le coefficient $L = \pi\mu_0 n^2 R^2 \ell$ comme étant l'inductance propre du solénoïde.

Note : L'énergie magnétique s'exprime aussi bien par l'intégrale : $\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\iint_{\mathrm{M}\in S} \overrightarrow{j_{\mathrm{s}}(\mathrm{M})} \cdot \overrightarrow{A(\mathrm{M})}\, dS$

où $S = 2\pi R \ell$ est la surface d'une longueur ℓ de solénoïde. Sur cette surface, le potentiel vecteur a pour expression $\overrightarrow{A} = \dfrac{1}{2}\mu_0 j_{\mathrm{s}} R\, \overrightarrow{e_\varphi}$ et, par conséquent, le produit scalaire $\overrightarrow{j_{\mathrm{s}}} \cdot \overrightarrow{A} = \dfrac{1}{2}\mu_0 j_{\mathrm{s}}^2 R$ prend la même valeur en tout point de la surface S. Nous en déduisons :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\iint_{\mathrm{M}\in S} \overrightarrow{j_{\mathrm{s}}} \cdot \overrightarrow{A}(\mathrm{M})\, dS = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\mu_0 j_{\mathrm{s}}^2 R \times \iint_{\mathrm{M}\in S} dS = \frac{1}{4}\mu_0 j_{\mathrm{s}}^2 R \times 2\pi R \ell = \frac{1}{2}\pi\mu_0 j_{\mathrm{s}}^2 R^2 \ell$$

Nous retrouvons bien sûr la même expression que par le calcul précédent.

Dans l'approximation filiforme du solénoïde, nous écririons :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}\in\mathcal{C}} i\, \overrightarrow{A(\mathrm{M})} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{M}\in\mathcal{C}} i \times \frac{1}{2}\mu_0 n\, i\, R\, d\ell = \frac{1}{4}\mu_0 n\, i^2 R \int_{\mathrm{M}\in\mathcal{C}} d\ell$$

L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{M}\in\mathcal{C}} d\ell$ est égale à la longueur totale du fil enroulé pour constituer une longueur ℓ de solénoïde, soit $\displaystyle\int_{\mathrm{M}\in\mathcal{C}} d\ell = 2\pi R \times n\ell$. Nous retrouvons bien sûr le même résultat : $\mathcal{E}_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}\left(\pi\mu_0 n^2 R^2 \ell\right) i^2$