

## PROPAGATION ET RAYONNEMENT

### Chapitre 5

## Rayonnement d'un dipôle oscillant

Les ondes électromagnétiques que l'on peut observer se propageant dans le vide, dans un guide d'onde ou dans un plasma ont une origine : ces ondes sont dues au fait que quelque part dans l'espace, des charges électriques ont été soumises à des mouvements accélérés. L'étude générale de la production d'ondes électromagnétiques est extrêmement complexe et nous nous limiterons dans ce chapitre à l'étude du champ rayonné par un dipôle électrique oscillant. Le programme des classes MP stipule : «La connaissance et la démonstration des résultats ne sont pas exigibles mais la succession des approximations qui y conduisent doit être connue des étudiants».

Une bonne connaissance du cours d'électrostatique sur le dipôle électrique est un prérequis indispensable pour comprendre ce chapitre.

### 5.1. Dipôle oscillant

#### Moment dipolaire électrique

##### Définitions

Considérons un ensemble de charges  $q_i$  confinées dans un volume  $\tau$ .

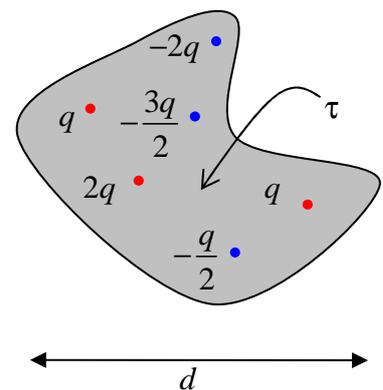
On appelle moment dipolaire  $\vec{p}$  de ce système de charges la quantité vectorielle :

$$\vec{p} = \sum_{\tau} q_i \vec{r}_i$$

Dans le cas d'un ensemble de charges électriquement neutre, c'est-à-dire tel que  $\sum_i q_i = 0$ , la valeur du moment

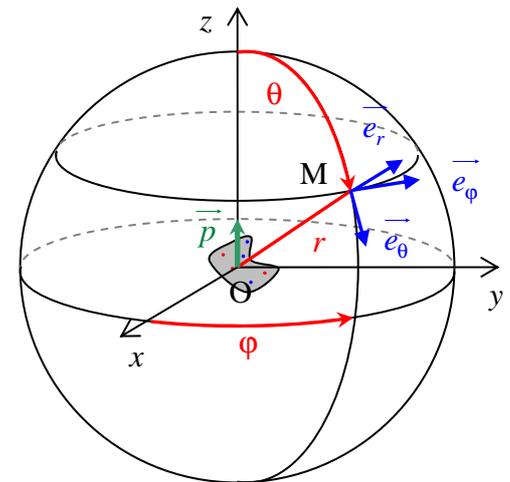
dipolaire est indépendante du référentiel galiléen dans lequel on l'exprime (cf. cours d'électrostatique). Nous nous placerons délibérément dans ce cas de figure.

Nous noterons  $d$  l'ordre de grandeur de la plus grande des dimensions de l'espace  $\tau$  de confinement des charges.



**Notations**

Pour l'exposé qui va suivre, nous placerons systématiquement le dipôle selon l'axe polaire  $Oz$  d'un système de coordonnées sphériques défini selon la norme internationale ISO<sup>1</sup> : le plan méridien de M est repéré par la longitude notée  $\varphi$  et le point M est repéré dans le plan méridien par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où l'angle polaire  $\theta$  est compté à partir de l'axe polaire  $Oz$ .



**Approximation dipolaire**

Dans le cadre du cours d'électrostatique, nous nous étions attaché à trouver une expression simplifiée du potentiel scalaire et du champ électrique en un point M situé à très grande distance des charges :  $r \gg d$ . Nous avons ainsi défini les conditions de « l'approximation dipolaire ».

*Rappel du cours d'électrostatique* : si l'on considère un dipôle dont le moment dipolaire  $\vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_z$  est constant et dirigé selon l'axe  $Oz$ , le potentiel dipolaire, expression du potentiel dans l'approximation dipolaire, a pour valeur :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

En un point M de l'espace, le champ électrostatique dipolaire est dans le plan méridien de M et a pour expression :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}V(M) = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p}_0 \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}_0}{r^3}$$

Dans l'approximation dipolaire, le potentiel scalaire électrostatique décroît comme l'inverse du carré de la distance au charges et le champ électrostatique décroît comme l'inverse du cube de ces distances, c'est-à-dire beaucoup plus rapidement que les champs monopolaires qui sont en  $1/r^2$ .

Nous montrerons dans ce chapitre que si les charges sont soumises à des mouvements accélérés, il existe à grande distance des champs électriques et magnétiques qui décroissent encore beaucoup moins rapidement que les champ statiques dipolaires et même monopolaire puisqu'ils sont en  $1/r$ .

**Approximation non relativiste**

Les charges  $q_i$  sont mobiles et se déplacent à des vitesses  $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$  que l'on supposera non relativistes.



**Rappel !** Une vitesse non relativiste est une vitesse dont le module est très inférieur à la vitesse  $c_0$  de propagation de l'interaction électromagnétique dans le vide.

Dans cette approximation non relativiste, les dérivées successives par rapport au temps du moment dipolaire sont définies de façon unique pour tous les observateurs galiléens.

Dans le cas particulier où le moment dipolaire reste en permanence dans la même direction  $Oz$ , il en est de même de ses dérivées par rapport au temps :

$$\vec{p} = p(t) \vec{e}_z \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp(t)}{dt} \vec{e}_z \quad \frac{d^2\vec{p}}{dt^2} = \frac{d^2p(t)}{dt^2} \vec{e}_z$$

<sup>1</sup> Norme NF ISO 31-11

*Remarque* : envisageons d'ores et déjà une oscillation sinusoïdale du moment dipolaire de pulsation  $\omega$ . L'hypothèse non relativiste signifie que les modules de vitesses des charges sont très petits par rapport à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide :  $v_i \ll c_0$ . L'amplitude des vitesses étant égale à l'amplitude  $r_i$  multipliée par  $\omega$ , et ces elongations  $r_i$  étant toutes majorées par la dimension caractéristique  $d$  du dipôle, il s'ensuit que l'hypothèse non relativiste équivaut à la condition :  $\omega d \ll c_0$ .

Des ondes électromagnétiques de longueur d'onde  $\lambda = c_0 T = 2\pi \frac{c_0}{\omega}$  seront observées à grande distance du dipôle. Nous pouvons affirmer que le cas d'une oscillation dipolaire non relativiste, cette longueur d'onde sera très supérieure en ordre de grandeur à la dimension caractéristique du dipôle :  $\lambda \gg d$ .

## 5.2. Potentiels rayonnés

### Équations dalembertiennes

#### Équations dalembertiennes des champs

Les champs électrique et magnétique sont solutions des équations de Maxwell, équations différentielles du premier ordre couplées, reliant les champs  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  aux sources  $\rho(\vec{r}, t)$  et  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ .

En combinant ces équations, nous avons démontré que les champs obéissent à des équations linéaires du second ordre découplées qui sont des équations dalembertiennes avec second membre. Toutefois, l'expression des seconds membres est trop compliquée et nous ne savons pas résoudre directement ces équations d'onde autrement que dans des régions de l'espace vides de toute charge et de tout courant.

$$\square \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \mu_0 \frac{d\vec{j}}{dt} \quad \text{et} \quad \square \vec{B} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}$$

Rappelons la définition de l'opérateur dalembertien :  $\square = \Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

#### Équations dalembertiennes des potentiels

Dans le cadre de la jauge de Lorentz :  $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , les potentiels électromagnétiques  $V(\vec{r}, t)$  et  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  obéissent à des équations dalembertiennes bien plus simples, dont nous saurons exprimer des solutions particulières intéressantes.

$$\square V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Nous en déduisons les champs par les relations de définition du potentiel électromagnétique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

#### Les potentiels retardés

La résolution de ces équations différentielles du second ordre n'est pas simple et dépasse largement le cadre de notre programme d'étude. Nous admettrons l'existence solutions particulières de ces équations que l'on nomme fort justement « *potentiels retardés* ».

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho\left(P, t - \frac{PM}{c_0}\right)}{PM} \delta\tau \quad \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{PM}{c_0}\right)}{PM} \delta\tau$$

*Remarque* : ces solutions ont la même forme que les solutions que nous connaissons déjà dans le cadre de l'électromagnétisme stationnaire. Le potentiel scalaire électrostatique (pourvu que celui-ci soit choisi nul à l'infini) et le potentiel vecteur magnétostatique (pourvu que celui-ci soit choisi nul à l'infini et qu'il obéisse à la jauge de Coulomb  $\text{div } \vec{A} = 0$ , équivalent magnétostatique de la jauge de Lorentz) sont donnés par les expressions :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho(P)}{PM} \delta\tau \quad \text{et} \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM} \delta\tau$$

Les potentiels retardés sont des intégrales de même type dans laquelle sont pris en compte les temps de propagation  $\frac{PM}{c_0}$  de l'interaction électromagnétique entre le point M et les points P où se trouvent les sources.

### Expression des potentiels dans la double approximation dipolaire et non relativiste

#### Expression du potentiel vecteur dans la double approximation dipolaire et non relativiste

Appliquée à un ensemble discret de charges en mouvement et non plus à une distribution continue de courants, l'intégrale définissant le potentiel vecteur retardé s'écrit sous la forme d'une somme discrète :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\tau} \frac{q_i \vec{v}_i \left( t - \frac{P_i M}{c_0} \right)}{P_i M}$$

*A priori*, les temps de retard  $P_i M / c_0$  diffèrent d'une charge à l'autre. Ils peuvent différer d'une valeur dont l'ordre de grandeur est  $d / c_0$ , ordre de grandeur du temps de propagation de l'interaction électromagnétique sur une distance correspondant à l'extension spatiale de la distribution de charge.

Dans un temps de cet ordre de grandeur, les vitesses des charges ne peuvent changer de façon notable dès lors que ce temps est petit devant la période caractéristique du mouvement des charges et cette condition s'écrit  $d / c_0 \ll T$  ou encore  $d \ll \lambda$ . C'est la condition de l'approximation non relativiste.

Dans le cadre de l'approximation non relativiste, nous pouvons donc considérer que les temps de retard sont identiques pour toutes les charges et ont pour même valeur  $r / c_0$ .

Nous nous plaçons également dans le cadre de l'approximation dipolaire  $d \ll r$  et nous pouvons donc, au premier ordre, assimiler les différentes distance  $P_i M$  à la distance  $r = OM$ .

Cela nous conduit à cette expression plus simple du potentiel vecteur, satisfaisant dans le cadre de la double approximation dipolaire et non relativiste :

$$\vec{A}_{\text{dip}}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{\tau} q_i \vec{v}_i \left( t - \frac{r}{c_0} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{dp}{dt} \left( t - \frac{r}{c_0} \right) \vec{e}_z$$

#### Expression du potentiel scalaire dans la double approximation dipolaire et non relativiste

Appliquée à un ensemble discret de charges et non plus à une distribution continue de charges, l'intégrale définissant le potentiel scalaire retardé s'écrit sous la forme d'une somme discrète :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\tau} \frac{q_i}{P_i M}$$

Les différentes distances  $P_iM$  doivent bien sûr être considérées aux instants d'émission de l'interaction électromagnétique et pour obtenir l'expression approchée au premier ordre non nul du potentiel scalaire, nous devons considérer le développement limite de  $P_iM^{-1}$  en tenant compte des variations dans le temps des positions  $P_i$  des charges. Ce calcul est assez compliqué et il nous conduit à l'expression d'un potentiel scalaire  $V_{\text{dip}}$  qui, associé au potentiel vecteur  $\vec{A}_{\text{dip}}$ , doit satisfaire à la jauge de Lorentz.

Nous allons donc déterminer le potentiel  $V_{\text{dip}}$  en appliquant la jauge de Lorentz au potentiel vecteur  $\vec{A}_{\text{dip}}$ .

$$\frac{\partial V_{\text{dip}}}{\partial t} = -c_0^2 \operatorname{div} \vec{A}_{\text{dip}} = -c_0^2 \operatorname{div} (A_z \vec{e}_z)$$

De façon générale,  $\vec{\nabla} (f \vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v} + f (\vec{\nabla} \vec{v})$ , soit :  $\operatorname{div} (f \vec{v}) = (\vec{\operatorname{grad}} f) \cdot \vec{v} + f (\operatorname{div} \vec{v})$ .

Dans notre cas,  $\vec{e}_z$  est un vecteur uniforme, et cela donne :

$$\operatorname{div} (A_z \vec{e}_z) = (\vec{\operatorname{grad}} A_z) \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial A_z}{\partial r} \cos \theta$$

Soit : 
$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{dp}{dt} \left( t - \frac{r}{c_0} \right) \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dp}{dt} \left( t - \frac{r}{c_0} \right) - \frac{1}{rc_0} \frac{d^2 p}{dt^2} \left( t - \frac{r}{c_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r^2} p \left( t - \frac{r}{c_0} \right) - \frac{1}{rc_0} \frac{dp}{dt} \left( t - \frac{r}{c_0} \right) \right)$$

Nous en déduisons l'expression du potentiel scalaire retardé dans la double approximation dipolaire et non relativiste :

$$V_{\text{dip}} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} p \left( t - \frac{r}{c_0} \right)}_{\text{potentiel dipolaire retardé quasi statique}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{rc_0} \frac{dp}{dt} \left( t - \frac{r}{c_0} \right)}_{\text{potentiel dipolaire retardé rayonné à grande distance}}$$

Cette expression du potentiel comprend deux termes.

- Le premier est non nul même lorsque les charges sont immobiles, c'est le *potentiel dipolaire retardé quasi statique* qui a la même dépendance spatiale en  $\frac{\cos \theta}{r^2}$  que le potentiel dipolaire électrostatique avec la seule différence que le moment dipolaire est fonction du temps, la valeur à prendre en compte étant bien sûr la valeur au moment de l'émission électromagnétique par le dipôle.
- Le deuxième terme, que nous appellerons *potentiel dipolaire retardé rayonné à grande distance*, a une dépendance spatiale en  $\frac{\cos \theta}{r}$ . La décroissance en  $1/r$ , au lieu de  $1/r^2$  pour le terme quasi statique, fait que ce terme qualifié de « rayonné » devient toujours prépondérant à très grande distance, dans un espace que l'on qualifie de « **zone de rayonnement** » du dipôle.

### Cas particulier d'un dipôle oscillant harmonique

Considérons le cas particulier d'un dipôle dont le moment dipolaire est une fonction sinusoïdale du temps :  $\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \vec{e}_z$ . En posant  $k = \omega/c_0$ , le potentiel dipolaire retardé s'écrit alors sous la forme de deux ondes sphériques divergentes :

$$V_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} p_0 \left( \cos(\omega t - kr) - kr \sin(\omega t - kr) \right)$$

Le potentiel dipolaire rayonné (terme en *sinus*) devient prépondérant par rapport au potentiel dipolaire quasi statique (terme en *cosinus*) dès lors que la condition  $kr \gg 1$  sera satisfaite.

La « zone de rayonnement » du dipôle est donc définie par la condition  $r \gg \frac{1}{k}$  que nous pouvons écrire aussi bien  $r \gg \lambda$  en introduisant la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  des ondes sphériques divergentes.

*Remarque* : nous sommes toujours dans le cadre de l'hypothèse non relativiste ( $\lambda \gg d$ ). Le fait de se placer dans la zone de rayonnement ( $r \gg \lambda$ ) implique que soit satisfaite la condition de l'approximation dipolaire ( $r \gg d$ ). Dans la zone de rayonnement et dans l'hypothèse non relativiste, la hiérarchie des distances s'établit ainsi :  $r \gg \lambda \gg d$ .

### Potentiels électromagnétiques dans la zone de rayonnement

Dans le cas particulier d'une oscillation harmonique, dans le cadre de l'approximation non relativiste et dans la zone de rayonnement  $r \gg \lambda \gg d$ , les potentiels électromagnétiques sont proportionnels à la dérivée du moment dipolaire retardée du temps  $r/c_0$  de propagation l'interaction électromagnétique :

$$V(M, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{rc_0} \frac{dp}{dt} \left( t - \frac{r}{c_0} \right) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{\omega \cos\theta}{c_0 r} \sin(\omega t - kr)$$

$$\vec{A}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{dp}{dt} \left( t - \frac{r}{c_0} \right) \vec{e}_z = - \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega}{r} \sin(\omega t - kr) \vec{e}_z$$

Nous pourrions avantageusement introduire des potentiels symboliques complexes pour lesquels les opérations de dérivation par rapport à l'espace et au temps se trouvent simplifiées :

$$\underline{V}(M, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p_0 \frac{i\omega \cos\theta}{c_0 r} e^{i(\omega t - kr)} \quad \text{et} \quad \vec{\underline{A}}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{i\omega}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_z$$

### 5.3. Expression des champs dans la zone de rayonnement

Nous allons mener ces calculs dans le cas particulier d'une oscillation dipolaire électrique harmonique, en utilisant le calcul symbolique et en ne gardant que les termes prépondérants dans la zone de rayonnement définie par la relation  $kr \gg 1$ .

#### Champ électrique dans la zone de rayonnement

Le champ électrique est donné par la relation  $\vec{E} = -\text{grad} \underline{V} - \frac{\partial \vec{\underline{A}}}{\partial t}$ .

$$\text{Avec} \begin{cases} \text{grad} \underline{V} = \frac{\partial \underline{V}}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{V}}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \approx_{kr \gg 1} \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \omega^2 \frac{\cos\theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_r \\ \frac{\partial \vec{\underline{A}}}{\partial t} = - \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_z = - \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{r} e^{i(\omega t - kr)} (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta) \end{cases}$$

Nous obtenons l'expression du champ  $\vec{E}$  dans la zone de rayonnement :

$$\vec{E} = - \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{r} \sin\theta e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta \quad \text{soit} \quad \vec{E} = - \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{r} \sin\theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$$

Le champ électrique est orthoradial dans le plan méridien, porté par le vecteur  $\vec{e}_\theta$ .

### Champ magnétique dans la zone de rayonnement

Le champ magnétique est donné par la relation  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  où le potentiel vecteur  $\vec{A}$  est un vecteur axial dont l'amplitude  $A_z$  n'est fonction que de  $r$  et de  $t$  :  $\vec{A} = A_z(r, t) \vec{e}_z$ .

De façon générale :  $\vec{\nabla} \wedge (f \vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \wedge \vec{v} + f (\vec{\nabla} \wedge \vec{v})$ , soit :  $\text{rot}(f \vec{v}) = (\text{grad } f) \wedge \vec{v} + f (\text{rot } \vec{v})$ .

Dans notre cas,  $\vec{e}_z$  étant un vecteur uniforme :  $\text{rot}(A_z \vec{e}_z) = (\text{grad } A_z) \wedge \vec{e}_z = \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \sin \theta \vec{e}_\phi$

avec  $A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{i\omega}{r} e^{i(\omega t - kr)}$  et donc  $\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\omega}{r^2} \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 (-i + kr) e^{i(\omega t - kr)} A_z$ .

Dans la zone de rayonnement ( $kr \gg 1$ ), cette expression se réduit à :  $\frac{\partial A_z}{\partial r} \underset{kr \gg 1}{\approx} \frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{c_0 r} e^{i(\omega t - kr)}$

Nous en déduisons l'expression du champ  $\vec{B}$  dans la zone de rayonnement :

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{c_0 r} \sin \theta e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\phi \quad \text{soit} \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{c_0 r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\phi$$

Le champ magnétique est orthoméri dien, porté par le vecteur  $\vec{e}_\phi$ .

### Structure de l'onde électromagnétique rayonnée

#### Structure globale

Posons  $E_0 = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{r} \sin \theta$  et introduisons le vecteur d'onde  $\vec{k} = k \vec{e}_r$ . Les champs électriques et magnétiques s'écrivent alors sous la forme :

$$\vec{E} = E_0(r, \theta) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{E_0(r, \theta)}{c_0} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_\phi$$

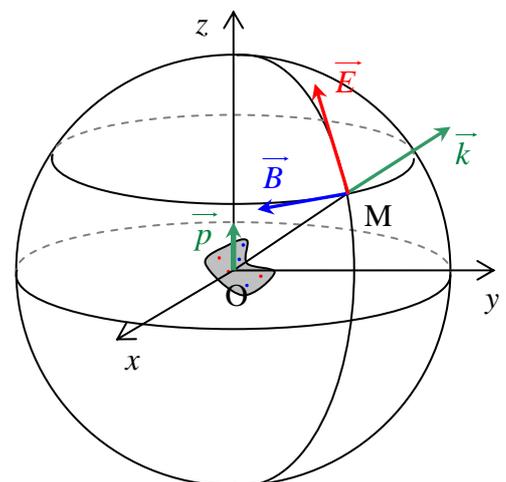
— La première remarque est que l'onde électromagnétique rayonnée par le dipôle oscillant est **anisotrope** : il ne s'agit pas d'une onde sphérique. Toutefois, cette onde est invariante par rotation autour de l'axe du dipôle dont nous avons supposé, rappelons-le, qu'il était de direction fixe.

— Le rayonnement dipolaire a une amplitude maximale dans les directions orthogonales au moment dipolaire. **Il est nul dans l'axe du dipôle.**

— Comme pour une onde plane progressive, le trièdre  $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$  est **direct** et, dans le cas particulier

d'une oscillation dipolaire harmonique, la même relation  $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$  que pour une onde plane harmonique est vérifiée en tout point de la zone de rayonnement.

— Les amplitudes des champs décroissent comme l'inverse  $1/r$  de la distance au dipôle.

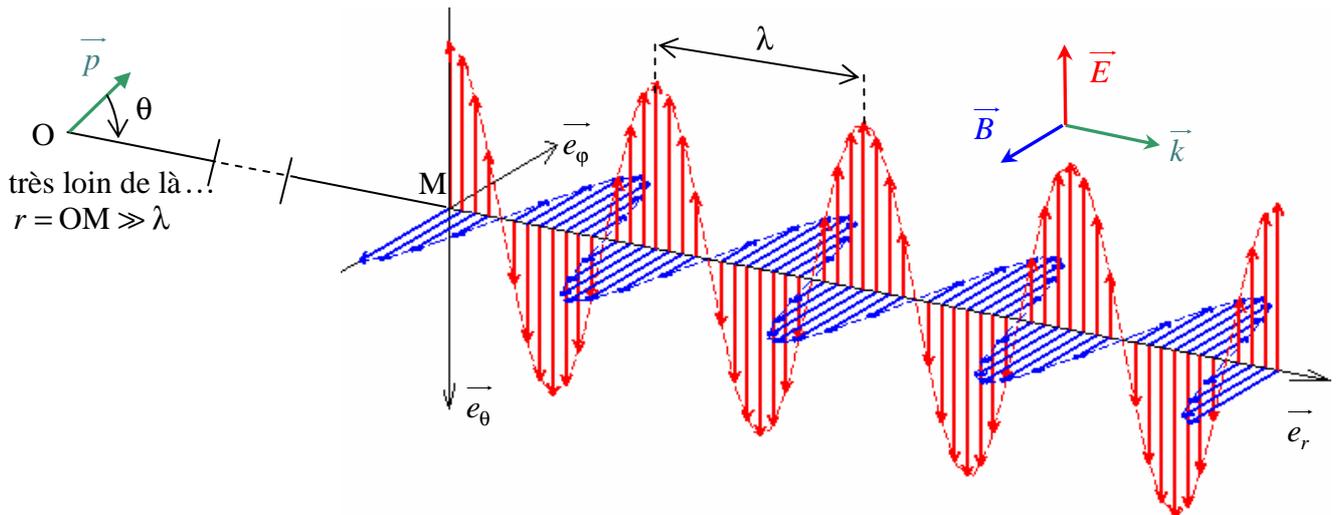


**Structure locale**

Dans la zone de rayonnement,  $r$  étant très grand par rapport à la longueur d'onde, l'amplitude  $E_0(r, \theta)$  est une fonction très lentement variable dans l'espace qui peut être considérée comme constante sur des domaines d'espace s'étendant sur de multiples longueur d'ondes. Sur de tels domaines d'espace, l'onde électromagnétique peut être décrite localement comme une onde plane de polarisation rectiligne :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_\theta \quad \vec{B} = \frac{E_0}{c_0} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_\varphi \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c_0} \vec{e}_r$$

avec  $E_0 = -\frac{\mu_0}{4\pi} p_0 \frac{\omega^2}{r} \sin \theta \approx C^{te}$



**5.4. Puissance rayonnée**

**Diagramme de rayonnement dipolaire**

Exprimons le vecteur de Poynting de l'onde rayonnée dans la zone de rayonnement :  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c_0 r^2} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{e}_r$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est selon  $\vec{e}_r$  et correspond bien, nous nous y attendions, à une propagation divergente de l'énergie :

$$\langle \vec{\Pi}(M, t) \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{32\pi^2 c_0 r^2} \vec{e}_r$$

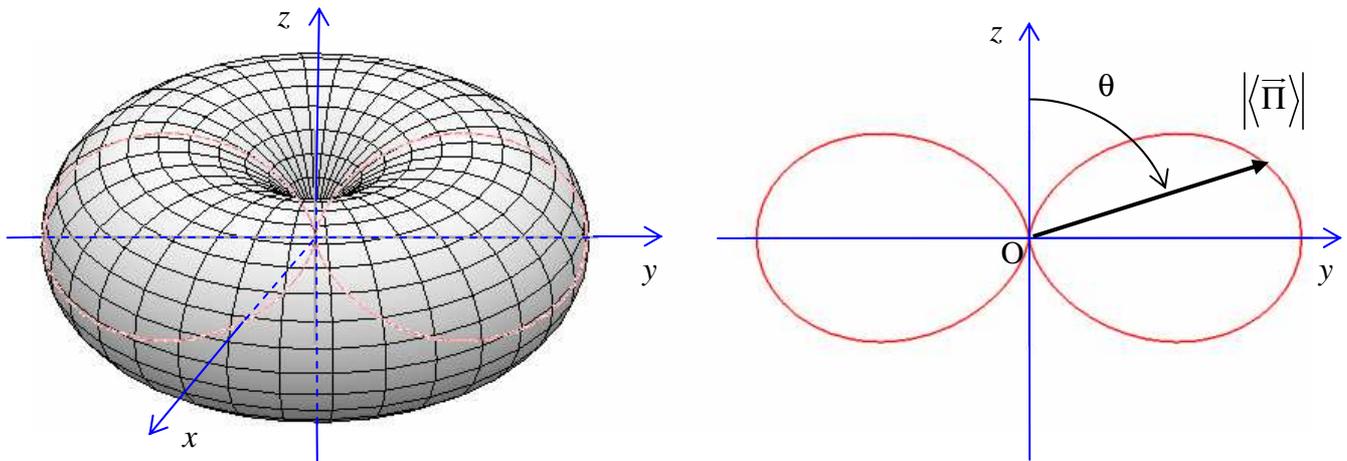
Rappelons que le module de la valeur moyenne du vecteur de poynting correspond à la puissance surfacique transportée par l'onde électromagnétique dans sa direction de propagation.

Il apparaît donc que le rayonnement dipolaire est anisotrope, maximal pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire dans le plan équatorial du dipôle oscillant et nul pour  $\theta = 0$ , dans l'axe du dipôle.

L'anisotropie d'une émission peut être illustrée par le *diagramme de rayonnement* représentant le module de la valeur moyenne du vecteur de Poynting en fonction de la direction  $(\theta, \varphi)$  dans l'espace :

$$\left| \langle \vec{\Pi} \rangle \right| = f(\varphi, \theta)$$

Dans le cas particulier du rayonnement dipolaire, l'axe Oz est un axe de symétrie et le diagramme de rayonnement, indépendant de  $\varphi$ , présente cette symétrie. Nous pouvons représenter ce diagramme soit dans l'espace (il s'agit alors d'un tore de révolution autour de l'axe Oz) soit, étant donnée l'invariance par rotation autour de Oz, par le diagramme polaire  $|\langle \vec{\Pi} \rangle| = \Pi_{\max} \sin^2 \theta$  dans un plan méridien.



### Puissance totale rayonnée

La puissance moyenne rayonnée dans tout l'espace par le dipôle oscillant correspond au flux de la valeur moyenne du vecteur de Poynting à travers une sphère  $S$  de rayon  $r$  centrée sur le dipôle :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{n} \, \delta S = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c_0} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c_0} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin^3 \theta \, d\theta}_{4/3}$$

Finalement :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0}{12\pi c_0} p_0^2 \omega^4 = \frac{4\pi^3 \mu_0}{3 c_0} p_0^2 v^4 = \frac{4\pi^3 c_0}{3 \epsilon_0} p_0^2 \frac{1}{\lambda^4}$$

La puissance rayonnée ne dépend pas du rayon  $r$  de la sphère à travers laquelle on calcule le flux. La variation en  $1/r$  des champs n'est pas due à une dissipation d'énergie, mais à une *dilution de l'énergie* dans l'espace.

Nous retiendrons également ce résultat remarquable : la puissance moyenne rayonnée par un dipôle électrique harmonique est proportionnelle à la puissance quatrième de la pulsation (ou de la fréquence) d'oscillation du dipôle, ou, cela revient au même, inversement proportionnelle à la puissance quatrième de la longueur d'onde rayonnée.

## 5.5. Applications

### Le paradoxe d'Olbers

Cette propriété de l'énergie électromagnétique rayonnée de se diluer dans l'espace de la sorte se traduit par une propriété très simple : si l'on se place à une distance du Soleil  $x$  fois plus grande, la puissance électromagnétique reçue par unité de surface (que l'on nomme « *éclairage* ») est divisée par  $x^2$ .

Le Soleil,  $x$  fois plus lointain, sera vu sous un angle solide  $x^2$  fois plus petit (on peut dire aussi bien une « *surface apparente* »  $x^2$  fois plus petite). Cela signifie que l'éclat surfacique apparent (ou encore la « *brillance* ») du disque solaire est inchangé.

Heinrich Olbers énonce en 1823 cette affirmation qui restera paradoxale pendant presque un siècle :

« S'il y a réellement des soleils dans tout l'espace infini, qu'ils soient séparés par des distances à peu près égales, ou répartis dans des systèmes de Voies lactées, leur ensemble est infini et alors, le ciel tout entier devrait être aussi brillant que le soleil. Car toute ligne que j'imagine tirée à partir de nos yeux rencontrera nécessairement une étoile fixe quelconque et par conséquent tout point du ciel devrait nous envoyer de la lumière stellaire, donc de la lumière solaire. »

Le fond du ciel nocturne est noir et non pas brillant comme la surface d'une étoile et plus d'un astronome voyait là, au XIX<sup>e</sup> siècle la preuve que l'Univers ne saurait être infini.

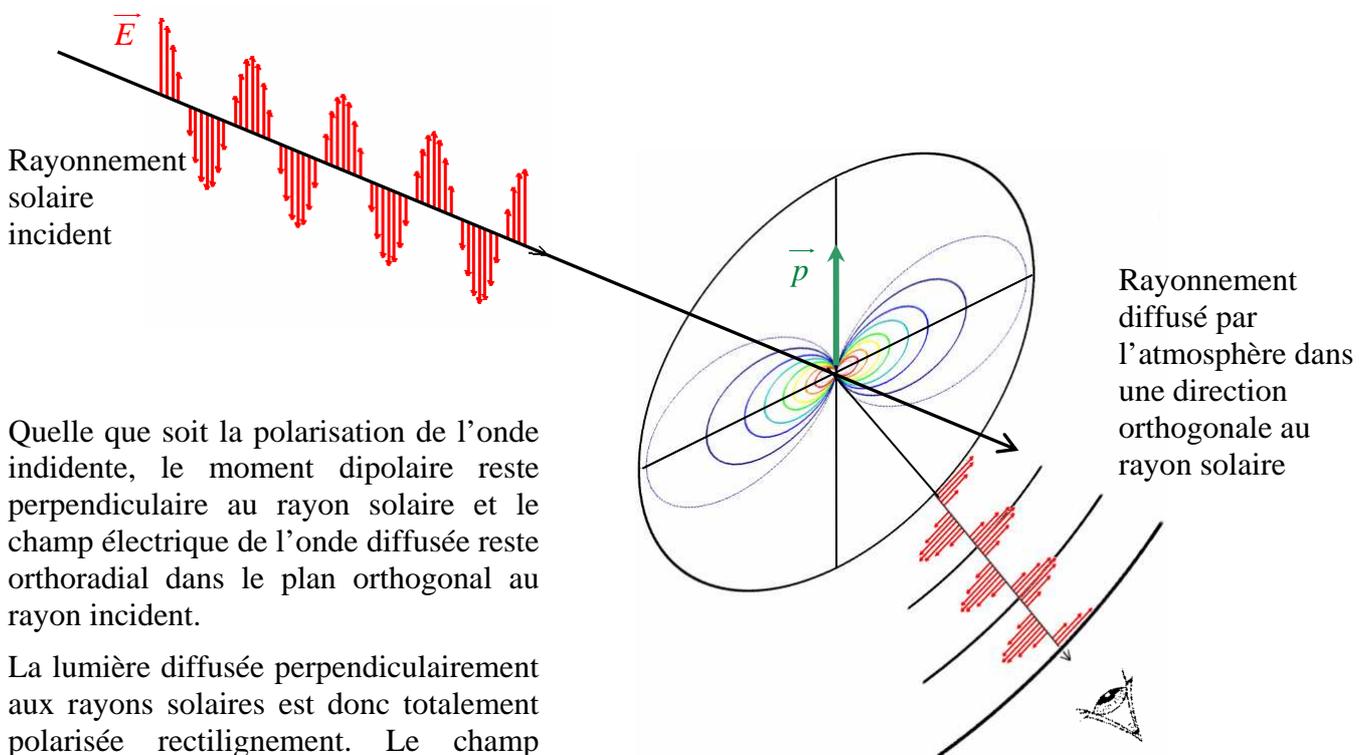
Nous savons aujourd'hui que l'expansion de l'Univers impose l'existence d'un horizon cosmologique : quand bien même l'Univers serait-il infini, nous ne pourrions en observer qu'une partie finie. Dans le cadre des théories cosmologiques contemporaines, le paradoxe d'Olbers n'impose pas que l'Univers soit fini. Fini ou infini ? En ce début du troisième millénaire, la question est toujours posée...

## La diffusion Rayleigh

Les longueurs d'ondes lumineuses visibles ( $400 \text{ nm} < \lambda < 750 \text{ nm}$ ) sont très grandes par rapport aux dimensions des petites molécules (de 0,1 nm à 1 nm). En conséquence, soumises à une onde lumineuse, les molécules d'un gaz se polarisent et se comportent comme autant de dipôles oscillants.

Ces dipôles rayonnent de l'énergie électromagnétique de même fréquence que la lumière excitatrice : c'est le phénomène de *diffusion Rayleigh*.

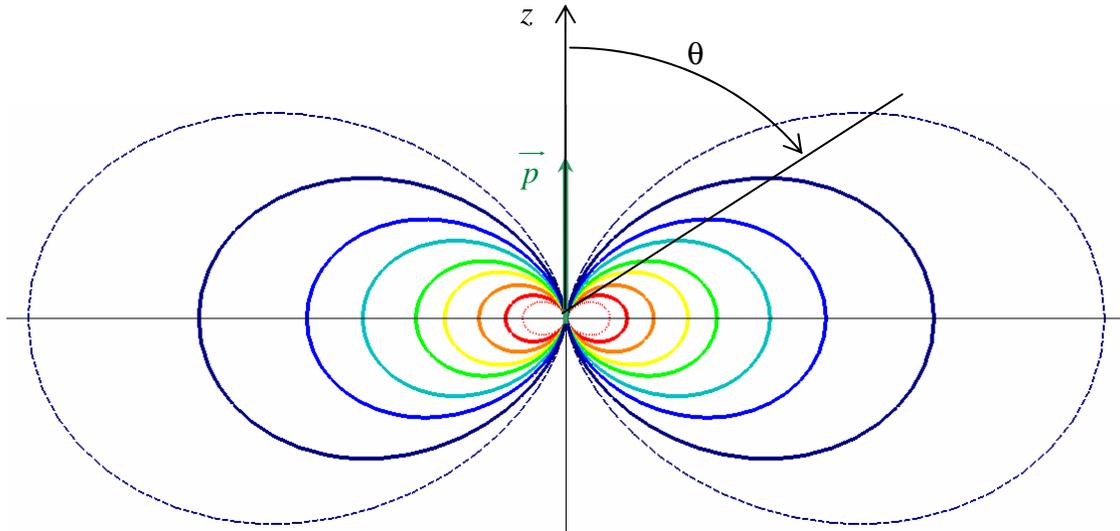
Le moment dipolaire ayant la direction du champ électrique excitateur, se trouve donc orthogonal à la direction de propagation de la lumière : il s'ensuit que même si la lumière excitatrice est un mélange aléatoire de toutes les polarisations (c'est le cas de la lumière solaire), la lumière diffusée sera partiellement polarisée.



Quelle que soit la polarisation de l'onde incidente, le moment dipolaire reste perpendiculaire au rayon solaire et le champ électrique de l'onde diffusée reste orthoradial dans le plan orthogonal au rayon incident.

La lumière diffusée perpendiculairement aux rayons solaires est donc totalement polarisée rectilignement. Le champ électrique de l'onde diffusée est alors perpendiculaire au plan défini par le rayon solaire et le rayon diffusé.

La puissance du rayonnement dipolaire est inversement proportionnelle à la puissance quatrième de la longueur d'onde lumineuse. La figure ci-dessous représente les diagrammes de rayonnement dipolaires pour différentes couleurs du spectre visible.



Entre la limite ultra violette du spectre visible ( $\lambda_{UV} \approx 400 \text{ nm}$ ) et la limite infra rouge ( $\lambda_{IR} \approx 750 \text{ nm}$ ), le rapport des longueurs d'onde élevé à la puissance quatre est voisin de 12 : le bleu est beaucoup plus diffusé que le rouge et cela n'est pas sans conséquences.

La première conséquence est la couleur bleue du ciel. Cette lumière émise par l'atmosphère éclairée par le Soleil est une émission polarisée due à la diffusion Rayleigh.

La deuxième conséquence est que le Soleil, la Lune et les étoiles apparaissent rouges lorsqu'ils sont proches de l'horizon, que ce soit au lever ou au coucher. Dans ces conditions, l'épaisseur d'atmosphère traversée par la lumière est bien plus importante que lorsque les astres culminent. Le pourcentage de lumière absorbée et rediffusée est aussi plus important et ce phénomène concerne plus efficacement le bleu que le rouge. En quelque sorte, le Soleil couchant est rouge ici parce que le ciel traversé par la lumière est bleu là-bas. Il fait toujours bleu quelque part.

La figure suivante représente trois spectres de lumière.

- Le premier est le spectre d'émission de l'hydrogène monoatomique : il nous sert de spectre étalon.
- Le second est un spectre de la lumière solaire dans lequel apparaissent des raies d'absorption.
- Le troisième est un spectre du bleu du ciel. L'observation de la coïncidence des raies d'absorption permet de comparer ce qui est comparable : la lumière diffusée est très appauvrie en lumière rouge.

