MÉCANIQUE

Chapitre 2

Mécanique des systèmes de points matériels

Les systèmes matériels sont décrits ici comme des ensembles de points matériels discrets. Les distributions continues de matière ne seront envisagées que dans le cas des solides que nous étudierons dans le chapitre suivant. La matière, quel que soit l'état dans lequel on la considère, est constituée de particules élémentaires si petites que la description discrète semble représenter le cas le plus général. Nous sommes amenés à introduire une distribution continue de matière dans le cadre de modèles où l'on veut ne pas avoir à rendre compte de la réalité microscopique : nous nous restreignons alors à une description mésoscopique de la répartition des masses. Cette représentation continue est nécessaire dans le cadre de la mécanique des fluides, qui n'est pas à notre programme d'étude, et dans le cadre de la mécanique des solides —systèmes constitués de parties « solides » associées par des liaisons— qui fera l'objet du chapitre suivant.

2.1. Éléments cinétiques d'un système

Système matériel

Définition

Un système matériel est défini par une certaine quantité de matière présente à l'intérieur d'une surface fermée quelconque $\mathcal{S}$. On ne considère que des systèmes fermés, n'échangeant pas de matière avec l'extérieur.

Distributions de masse

Distributions discrètes : Chaque point matériel (m_i, P_i) est défini par un paramètre scalaire, sa masse m_i, et par sa position dans l'espace P_i.

La masse d'un système de points matériels $\{(m_1, \mathrm{P}_1), (m_2, \mathrm{P}_2), \cdots, (m_n, \mathrm{P}_n)\}$ est égale à la somme des masses des points matériels constituant le système :

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Centre d'inertie d'un système

Définition

Par définition, le centre d'inertie I d'un système de points matériel $\{(m_1, \mathrm{P}_1), (m_2, \mathrm{P}_2), \cdots, (m_n, \mathrm{P}_n)\}$ est le barycentre des positions P_i affectées des masses m_i :

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\mathrm{OP}_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad \text{soit} \qquad m\,\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$$

Cette définition du centre d'inertie est indépendante du point origine O. En particulier, en faisant coïncider le point O avec le point I, ces relations deviennent :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{\mathrm{IP}_i} = \vec{0}$$

Remarque : on dit indifféremment « centre de masse » ou « centre d'inertie ». Il faut toutefois éviter l'expression « centre de gravité » qui a une signification différente. Le centre de gravité d'un système matériel est, dans un environnement gravitationnel, le point d'application du poids : le centre de gravité ne coïncide avec le centre de masse que dans l'approximation (souvent très proche de la réalité) d'un champ gravitationnel uniforme.

Prise en compte d'éléments de symétrie

En conséquence de la définition barycentrique du centre d'inertie, celui-ci obéit aux propriétés suivantes :

— le centre d'inertie d'un système matériel possédant un plan de symétrie appartient à ce plan.
— le centre d'inertie d'un système matériel possédant un axe de symétrie appartient à cet axe.
— le centre d'inertie d'un système matériel possédant un centre de symétrie coïncide avec ce point.

Distributivité

Si l'on considère une partition[1] d'un système de point matériel $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \oplus \cdots \oplus \Sigma_k$, le centre d'inertie de Σ s'identifie au centre d'inertie d'un ensemble de points matériels $\{(m_1, \mathrm{I}_1), (m_2, \mathrm{I}_2), \cdots, (m_k, \mathrm{I}_k)\}$ où m_i et I_i sont la masse et le centre d'inertie de chaque partie Σ_i.

Cette propriété se démontre sans difficulté particulière à partir de la définition barycentrique du centre de masse.

Torseur cinétique d'un système

Résultante cinétique

La résultante cinétique $\vec{p}$ d'un système matériel est, par définition, la quantité de mouvement totale de ce système, somme des quantités de mouvement de ses parties.

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v(\mathrm{P}_i)}$$

[1] Rappelons qu'une « partition » d'un ensemble est une décomposition en sous ensembles *disjoints* dont la réunion s'identifie à l'ensemble complet.

Propriété : étant donnée la définition barycentrique du centre d'inertie I du système matériel, la résultante cinétique s'identifie au produit de la masse totale du système *m* par la vitesse du centre d'inertie $\overrightarrow{v(\mathrm{I})}$.

$$\vec{p} = m\overrightarrow{v(\mathrm{I})}$$

En conséquence, la résultante cinétique, qui dépend bien sûr du référentiel dans lequel on l'exprime, est nulle, par définition, dans un référentiel ayant pour origine le barycentre du système.

Moment cinétique

On appelle moment cinétique $\overrightarrow{L_\mathrm{O}}$ en un point O quelconque d'un système discret de point matériels la somme des moments par rapport au point A des quantités de mouvement des points matériels :

$$\overrightarrow{L_\mathrm{O}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OP}_i} \wedge \overrightarrow{p_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OP}_i} \wedge m_i \overrightarrow{v(\mathrm{P}_i)}$$

$\left\{\vec{p}, \overrightarrow{L_\mathrm{O}}\right\}$ sont les éléments de réduction au point O d'un torseur que l'on appelle « *torseur cinétique* ».

Le champ de vecteurs $\overrightarrow{L_\mathrm{O}}$ obéit aux propriétés de changement de point d'un moment de torseur :

$$\overrightarrow{L_\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{AP}_i} \wedge m_i \overrightarrow{v(\mathrm{P}_i)} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OP}_i} \wedge m_i \overrightarrow{v(\mathrm{P}_i)} + \overrightarrow{\mathrm{AO}} \wedge \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{v(\mathrm{P}_i)} = \overrightarrow{L_\mathrm{O}} + \overrightarrow{\mathrm{AO}} \wedge \vec{p}$$

Équiprojectivité du moment cinétique

Le moment d'un torseur est équiprojectif : cela signifie les moments en deux points différents A et B ont même projection sur la droite Δ portée et orientée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$$\overrightarrow{L_\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{e_\Delta} - \overrightarrow{L_\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{e_\Delta} = \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \vec{p}\right) \cdot \overrightarrow{e_\Delta} = 0$$

Cette valeur commune sera nommée projection du moment cinétique sur l'axe de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_\Delta}$ ou encore, plus simplement « moment cinétique $L_{\bar{\Delta}}$ par rapport à l'axe de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_\Delta}$ ».

$$L_{\bar{\Delta}} = \overrightarrow{L_\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{e_\Delta} = \overrightarrow{L_\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{e_\Delta}$$

Énergie cinétique

Par définition, on appelle énergie cinétique d'un système matériel la somme des énergies cinétiques des éléments du système.

$$\mathcal{E}_\mathrm{k} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{\mathrm{k}i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Référentiel barycentrique

Définition

Lors de l'étude d'un système matériel Σ dans un référentiel $\mathcal{R}$, nous définirons le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ associé dans $\mathcal{R}$ au système Σ comme le référentiel en translation par rapport à $\mathcal{R}$, ayant pour origine le centre d'inertie I du système matériel Σ.

Torseur cinétique barycentrique

Par cette définition, il est clair que la résultante cinétique $\overrightarrow{p^*}$ du système Σ dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est nulle : $\overrightarrow{p^*} = \vec{0}$. En conséquence, le moment cinétique barycentrique est le même en tout point de l'espace, nous le noterons $\overrightarrow{L^*}$: $\overrightarrow{L_A^*} = \overrightarrow{L_O^*} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{p^*} = \overrightarrow{L_O^*} = \overrightarrow{L^*}$ et le torseur cinétique barycentrique a les mêmes éléments de réduction $\left\{\vec{0}, \overrightarrow{L^*}\right\}$ en tout point de l'espace.

Moment cinétique barycentrique :

Dans le référentiel barycentrique, le moment cinétique $\overrightarrow{L^*}$ est le même en tout point de l'espace.

Théorèmes de König

Moment cinétique

Chaque vitesse $\overrightarrow{v(P_i)}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ se déduit de la vitesse $\overrightarrow{v^*(P_i)}$ dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ par la relation $\overrightarrow{v(P_i)} = \overrightarrow{v^*(P_i)} + \overrightarrow{v(I)}$ où $\overrightarrow{v(I)}$ est la vitesse dans $\mathcal{R}$ du centre d'inertie.

Nous en déduisons la décomposition suivante du moment cinétique en un point A :

$$\overrightarrow{L_A} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \overrightarrow{v(P_i)} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{AP_i} \wedge m_i \left(\overrightarrow{v^*(P_i)} + \overrightarrow{v(I)}\right) = \overrightarrow{L^*} + \overrightarrow{AI} \wedge m \overrightarrow{v(I)}$$

Théorème de König relatif au moment cinétique

Le moment cinétique $\overrightarrow{L_A}$ d'un système matériel en un point A est égal à la somme du moment cinétique barycentrique $\overrightarrow{L^*}$ et du moment cinétique en A d'un point matériel fictif porteur de la masse totale *m* du système et dont la position coïncide avec le centre d'inertie I du système.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{L^*} + \overrightarrow{AI} \wedge m \overrightarrow{v(I)}}$$

Remarque : nous avons ainsi démontré que les éléments de réduction du torseur cinétique en un point A peuvent s'écrire sous la forme de la somme du torseur barycentrique (dont les éléments de réduction sont indépendants du point A) et des éléments de réduction en A du torseur cinétique d'un point matériel fictif porteur de la masse totale *m* du système et dont la position coïncide avec le centre d'inertie I du système.

$$\left\{\vec{p}, \overrightarrow{L_A}\right\} = \left\{\vec{0}, \overrightarrow{L^*}\right\} + \left\{m\overrightarrow{v(I)}, \overrightarrow{AI} \wedge m\overrightarrow{v(I)}\right\}$$

Remarque : si l'on applique le théorème de König au centre de masse I, cela s'écrit : $\overrightarrow{L_I} = \overrightarrow{L^*}$. Le moment cinétique barycentrique d'un système est égal au moment cinétique calculé au centre d'inertie du système matériel.

Énergie cinétique

Exprimons l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ du système matériel en faisant apparaître l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^{*2}$ du système matériel dans le référentiel barycentrique.

$$\mathcal{E}_{\mathrm{k}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\overrightarrow{v^*}(\mathrm{P}_i) + \overrightarrow{v}(\mathrm{I})\right)^2 = \mathcal{E}_{\mathrm{k}}^* + \overrightarrow{p^*} \cdot \overrightarrow{v}(\mathrm{I}) + \frac{1}{2} m v^2(\mathrm{I}) = \mathcal{E}_{\mathrm{k}}^* + \frac{1}{2} m v^2(\mathrm{I})$$

Théorème de König relatif à l'énergie cinétique

L'énergie cinétique $\mathcal{E}_{\mathrm{k}}$ d'un système matériel est égale à la somme de l'énergie cinétique barycentrique $\mathcal{E}_{\mathrm{k}}^*$ et de l'énergie cinétique d'un point matériel fictif porteur de la masse totale *m* du système et dont la position coïncide avec le centre d'inertie I du système.

$$\mathcal{E}_{\mathrm{k}} = \mathcal{E}_{\mathrm{k}}^* + \frac{1}{2} m v^2(\mathrm{I})$$

2.2. Dynamique des systèmes

Actions mécaniques

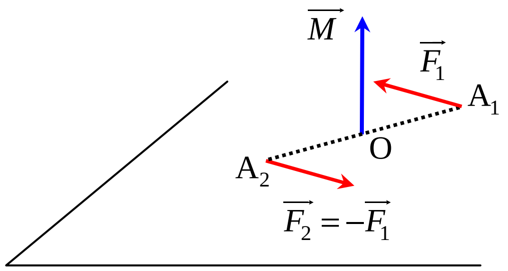
Les actions mécaniques sont à l'origine de la modification des mouvements des systèmes.

Forces

La forme la plus simple d'action mécanique s'appliquant à un système est la force $\overrightarrow{F}$, définie comme un vecteur lié s'appliquant en un point. Cette action, la plus simple qui soit, est de tous points de vues assimilable aux forces déjà introduites dans le cadre de la mécanique du point. La direction de la force définit sa droite d'action. L'intensité de la force se mesure en « newton » dans le Système international d'unités.

Couples

Toutes les actions mécaniques agissant sur un système matériel ne se réduisent pas à une simple force. Un couple est une action mécanique équivalente à deux forces opposées, situées sur deux supports distincts.



La résultante d'un couple, somme des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$, est donc nulle par définition. En conséquence, le moment du couple est indépendant du point en lequel on l'exprime :

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1} \wedge \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} \wedge \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1} \wedge \overrightarrow{F_1}\,.$$

Un couple est une action mécanique entièrement déterminée par son moment.

Torseur des actions mécaniques

Dans le cas le plus général, les actions mécaniques sur un système sont à chaque instant équivalentes à un torseur défini par ses éléments de réduction $\left\{\overrightarrow{F}, \overrightarrow{M_{\mathrm{A}}}\right\}$ en un point A quelconque.

La résultante $\overrightarrow{F}$ du torseur des actions mécaniques est égale à la somme des forces s'exerçant sur le système, quelles que soient leurs natures, quelles que soient leurs points d'application.

Le moment en A du torseur des actions mécaniques est égal à la somme des moments en A des forces s'exerçant sur le système.

Le moment en un autre point B est lié au moment en A par la relation générale des moments de torseurs :

$$\overrightarrow{M_{\mathrm{B}}} = \overrightarrow{M_{\mathrm{A}}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \wedge \overrightarrow{F}$$

Actions extérieures et intérieures à un système matériel

Nous serons amenés à distinguer, parmi les actions mécaniques subies par un système, des « actions intérieures » qui correspondent à des interactions entre parties d'un système et des « actions extérieures » qui correspondent à des interactions entre une partie du système et le milieu extérieur.

Nous admettrons que les actions intérieures d'un système mécanique, obéissant au principe de réciprocité des interactions (troisième loi de Newton), ont une résultante cinétique nulle. En effet, les forces $\overrightarrow{F_{ij}}$ et $\overrightarrow{F_{ji}}$ correspondant à l'action de l'élément *i* sur l'élément *j* et, respectivement, à l'action de l'élément *j* sur l'élément *i* peuvent être appariées en une résultante nulle : $\overrightarrow{F_{ij}} + \overrightarrow{F_{ji}} = \overrightarrow{0}$.

Les moments de ces forces peuvent être également appariés, et le moment résultant est nul. En effet, la force $\overrightarrow{F_{ij}}$ s'applique au point P_j et la force $\overrightarrow{F_{ji}}$ s'applique au point P_i :

$$\overrightarrow{M_{ij}} + \overrightarrow{M_{ji}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}_j} \wedge \overrightarrow{F_{ij}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}_i} \wedge \overrightarrow{F_{ji}} = \overrightarrow{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j} \wedge \overrightarrow{F_{ij}} = \overrightarrow{0}$$

En effet, les forces $\overrightarrow{F_{ij}}$ et $\overrightarrow{F_{ji}}$ sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j}$.

En conséquence, nous pouvons énoncer cette implication de la troisième loi de Newton pour les systèmes matériels : le torseur des actions mécaniques intérieures d'un système mécanique est toujours nul.

Implication de la troisième loi de Newton pour les systèmes matériels

Le torseur des actions mécaniques intérieures d'un système matériel est toujours nul.

$$\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\mathbf{int}}},\ \overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\mathbf{A\ int}}}\right\} = \left\{\sum_{\mathbf{int}} \overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ij}}},\ \sum_{\mathbf{int}} \overrightarrow{\mathbf{AP}_{\boldsymbol{j}}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ij}}}\right\} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{0}},\ \overrightarrow{\mathbf{0}}\right\}$$

Théorème des actions mutuelles

Considérons une partition d'un système matériel : $\Sigma = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$. Les interactions mécaniques intérieures à Σ (dont le torseur résultant est nul : $\left\{\overrightarrow{F_{\mathrm{int}}},\ \overrightarrow{M_{\mathrm{A\ int}}}\right\} = \left\{\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{0}\right\}$) peuvent se décomposer en interactions intérieures à Σ_1 (dont le torseur résultant est nul : $\left\{\overrightarrow{F_{\mathrm{int}1}},\ \overrightarrow{M_{\mathrm{A\ int}1}}\right\} = \left\{\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{0}\right\}$), en interactions intérieures à Σ_2 (dont le torseur résultant est nul : $\left\{\overrightarrow{F_{\mathrm{int}2}},\ \overrightarrow{M_{\mathrm{A\ int}2}}\right\} = \left\{\overrightarrow{0},\ \overrightarrow{0}\right\}$), en interactions de Σ_1 sur Σ_2 et en interactions de Σ_2 sur Σ_1.

Nous en déduisons le théorème des actions mutuelles en mécanique des systèmes :

Théorème des actions mutuelles

Le torseur des actions mécaniques exercées par un système matériel $\boldsymbol{\Sigma_1}$ sur un système matériel $\boldsymbol{\Sigma_2}$ est opposé au torseur des actions mécaniques exercées par le système matériel $\boldsymbol{\Sigma_2}$ sur le système matériel $\boldsymbol{\Sigma_1}$.

$$\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\mathbf{1\to2}}},\ \overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\mathbf{A1\to2}}}\right\} = \left\{-\overrightarrow{\boldsymbol{F}_{\mathbf{2\to1}}},\ -\overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\mathbf{A2\to1}}}\right\}$$

Théorème de la résultante cinétique

Référentiels galiléens

Nous considérons pour la suite que le référentiel $\mathcal{R}$ est un référentiel galiléen, ou référentiel d'inertie, c'est-à-dire que, dans ce référentiel, il est possible de définir une chronologie t telle que la formule fondamentale de la mécanique $\overrightarrow{F_i} = m_i\,\overrightarrow{a_i}$ s'applique à chaque point matériel constituant le système.

Nous admettrons également, et il s'agit là d'une restriction *non relativiste* de la mécanique, que ce temps inertiel est défini identiquement pour tous les observateurs : nous dirons plus simplement que le temps est absolu.

Théorème de la résultante cinétique et mouvement du centre de masse

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, la relation fondamentale de la dynamique étant vérifiée pour chaque point matériel, nous pouvons écrire qu'elle est vérifiée pour la somme des points matériel, que cette somme soit discrète ou intégrale :

$$\left(\overrightarrow{F_i} = m_i\,\overrightarrow{a_i}\ \forall i\right) \Rightarrow \sum \overrightarrow{F_i} = \sum m_i\,\overrightarrow{a_i}\,.$$

Pour le premier membre de cette relation, la résultante cinétique des action mécaniques intérieure étant nulle, nous pouvons limiter la sommation aux seules interactions extérieures : $\sum \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$.
Le second membre de cette relation s'exprime en fonction de la masse totale m du système matériel et de l'accélération de son centre d'inertie I : $\sum m_i\,\overrightarrow{a_i} = m\,\overrightarrow{a(\mathrm{I})}$.

Nous en déduisons le théorème de la résultante cinétique.

Théorème de la résultante cinétique

Dans un référentiel galiléen, la résultante des actions mécaniques extérieures à un système matériel Σ est égale au produit de la masse totale *m* du système Σ par l'accélération $\overrightarrow{a(\mathrm{I})}$ de son centre d'inertie I.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \sum \frac{d\,\overrightarrow{p_i}}{dt} = m\,\overrightarrow{a(\mathrm{I})}}$$

Loi de conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé

Nous définissons un système isolé comme un système qui n'est soumis à aucune action extérieure. L'accélération du centre de masse d'un tel système est nulle dans un référentiel galiléen, ce qui revient à dire que sa résultante cinétique, ou quantité de mouvement totale du système, est conservative.

$$\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{F_{\text{ext}}} = \overrightarrow{0}\\ \mathcal{R}\ \text{galiléen}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_i} = \overrightarrow{C^{te}}$$

Cette expression constitue la nouvelle formulation du principe d'inertie, ou « première loi de Newton ».

Théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique en un point fixe

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, le théorème du moment cinétique étant vérifié pour chaque point matériel, nous pouvons écrire qu'il est vérifié pour la somme des points matériels :

$$\left(\overrightarrow{M_{\mathrm{A}i}} = \frac{d\,\overrightarrow{L_{\mathrm{A}i}}}{dt}\ \forall i\right) \quad \Rightarrow \quad \sum \overrightarrow{M_{\mathrm{A}i}} = \sum \frac{d\,\overrightarrow{L_{\mathrm{A}i}}}{dt}$$

Pour le premier membre de cette relation, la résultante cinétique des moments des forces intérieures étant nulle, nous pouvons limiter la sommation aux seules interactions extérieures : $\sum \overrightarrow{M_{Ai}} = \overrightarrow{M_{A\,ext}}$.

Nous en déduisons le théorème du moment cinétique en un point fixe.

Théorème du moment cinétique en un point fixe

Dans un référentiel galiléen, la somme des moments en un point fixe A des actions mécaniques extérieures à un système matériel Σ est égale à la dérivée par rapport au temps du moment cinétique total du système Σ en A.

$$\overrightarrow{M_{A\,ext}} = \sum_i \frac{d\overrightarrow{L_{Ai}}}{dt}$$

Loi de conservation du moment cinétique pour un système isolé

Pour un système isolé, il n'y a pas de forces extérieures. La somme des moments des forces extérieures est donc nulle et, dans un référentiel galiléen, le moment cinétique total du système est conservatif.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{M_{A\,ext}} = \vec{0} \\ \mathcal{R} \text{ galiléen}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{L_{Ai}} = \overrightarrow{C^{te}}$$

Théorème du moment cinétique en projection sur un axe fixe

S'il existe un axe fixe privilégié pour le système mécanique que l'on étudie, comme par exemple dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe, il est souvent plus simple d'exprimer le théorème du moment cinétique par projection sur cet axe moment cinétique $L_{\vec{\Delta}}$ par rapport à cet axe $\vec{\Delta}$ orienté. $M_{\vec{\Delta}\,ext}$ représentant la projection sur l'axe $\vec{\Delta}$ du moment des actions mécaniques extérieures, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$M_{\vec{\Delta}\,ext} = \sum_i \frac{dL_{\vec{\Delta}i}}{dt}$$

Théorème du moment cinétique au centre de masse ou dans le référentiel barycentrique.

D'après le théorème de König, le moment cinétique au centre d'inertie d'un système matériel est égal au moment cinétique barycentrique : $\overrightarrow{L_I} = \overrightarrow{L^*}$.

D'autre part, puisque le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ est en mouvement de translation par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, les dérivations vectorielles dans $\mathcal{R}^*$ s'identifient aux dérivations vectorielles dans $\mathcal{R}$. Nous en déduisons que le théorème du moment cinétique peut s'appliquer au centre d'inertie I du système matériel, y compris bien sûr lorsque ce point I est mobile dans $\mathcal{R}$. Cela s'écrit :

$$\overrightarrow{M_{I\,ext}} = \sum_i \frac{d\overrightarrow{L_{Ii}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{L^*}}{dt}$$

Dynamique en référentiel non galiléen

Vecteur rotation instantanée

Le mouvement relatif d'un référentiel $\mathcal{R}\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0\left(\mathrm{O}_0, \overrightarrow{e_{0x}}, \overrightarrow{e_{0y}}, \overrightarrow{e_{0z}}\right)$ est caractérisé à chaque instant par la donnée de la vitesse $\overrightarrow{v_{\mathrm{O}/\mathcal{R}_0}}$ du point origine O bien évidemment mesurée dans $\mathcal{R}_0$ et du vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}$ de $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Rappelons les deux seuls cas de figure que nous étudierons dans le cadre de la mécanique des systèmes :

— $\mathcal{R}$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}_0$, ce qui revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont invariants. Alors le vecteur rotation instantanée est nul : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \overrightarrow{0}$.

— $\mathcal{R}$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}_0$ autour d'un axe de direction fixe $\mathrm{O}z$. Si l'on note $\varphi(t)$ l'angle de rotation autour de l'axe orienté par $\overrightarrow{e_z}$, le vecteur rotation a pour expression : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \dfrac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{e_z}$.

Formule de Varignon

La dérivation d'un vecteur suppose que l'on précise le référentiel dans lequel on dérive. Un vecteur $\overrightarrow{A}$ est défini dans $\mathcal{R}$ par ses composantes telles que $\overrightarrow{A} = A_x\,\overrightarrow{e_x} + A_y\,\overrightarrow{e_y} + A_z\,\overrightarrow{e_z}$.

La dérivée de $\overrightarrow{A}$ dans $\mathcal{R}$ est, par définition, le vecteur $\left(\dfrac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \dfrac{dA_x}{dt}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{dA_y}{dt}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{dA_z}{dt}\overrightarrow{e_z}$

Si l'on dérive ce même vecteur dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, il faut considérer que les vecteurs unitaires $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ sont fonctions du temps. La dérivée est alors donnée par la formule de Varignon, établie dans le cadre du cours de sciences de l'ingénieur :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{A}$$

Vitesse et accélération d'entraînement

Ainsi nomme-t-on les vitesse et accélération dans $\mathcal{R}_0$ d'un point P immobile dans $\mathcal{R}$. La formule de Varignon nous donne immédiatement l'expression de la vitesse d'entraînement :

$$\overrightarrow{v_{\mathrm{ent}\,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}(\mathrm{P}) = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O_0P}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O_0O}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

Pour obtenir l'expression de l'accélération d'entraînement, il faut appliquer une seconde fois la formule de Varignon, ce qui donne pour un point P immobile dans $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{a_{\mathrm{ent}\,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}(\mathrm{P}) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{O_0P}}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{O_0O}}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}{dt} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)$$

Remarque : la dérivée $\dfrac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}{dt}$ a même valeur dans $\mathcal{R}_0$ et dans $\mathcal{R}$. Il est donc inutile de préciser que cette dérivation se fait dans $\mathcal{R}$.

Le double produit vectoriel s'exprime aussi bien sous la forme d'une accélération centrifuge en introduisant le point H, projeté orthogonal de P sur l'axe de rotation : $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}}\right) = -\Omega^2_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}\overrightarrow{\mathrm{HP}}$

$$\overrightarrow{a_{\text{ent}\,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}(\mathrm{P}) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{O_0O}}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} + \frac{d\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}{dt} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \Omega^2_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}\overrightarrow{\mathrm{HP}}$$

Formules de changement de référentiel

La vitesse, exprimée dans $\mathcal{R}_0$, d'un point P mobile dans $\mathcal{R}$, s'écrit :

$$\vec{v}(\mathrm{P})_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O_0P}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O_0O}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{O_0O}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= \vec{v}(\mathrm{P})_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{v_{\text{ent}\,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}(\mathrm{P})$$

Pour ce qui est de l'accélération, il apparaît, en plus du terme d'entraînement, un terme d'accélération complémentaire encore appelé « accélération de Coriolis ».

$$\vec{a}(\mathrm{P})_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{\mathrm{O_0P}}}{dt^2}\right)_{\mathcal{R}_0} = \left(\frac{d\left(\vec{v}(\mathrm{P})_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{v_{\text{ent}\,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}(\mathrm{P})\right)}{dt}\right)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \left(\overrightarrow{v_{\text{ent}\,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}(\mathrm{P}) + \vec{v}(\mathrm{P})_{\mathcal{R}}\right)$$
$$= \vec{a}(\mathrm{P})_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{a_{\text{ent}\,\mathcal{R}/\mathcal{R}_0}}(\mathrm{P}) + \overrightarrow{a_{\text{Cor}}}(\mathrm{P})$$

Avec $\overrightarrow{a_{\text{Cor}}}(\mathrm{P}) = 2\,\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{v}(\mathrm{P})_{\mathcal{R}}$.

Actions mécaniques d'inertie

Les lois de la dynamique des systèmes ne sont valables que dans un référentiel galiléen. Nous pouvons toutefois appliquer les mêmes règles dans un référentiel non galiléen à la condition d'ajouter aux actions mécaniques réelles des actions mécaniques d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

$$\left\{\overrightarrow{F_{\text{ext}}} + \sum \overrightarrow{F_{\text{ent}\,i}} + \sum \overrightarrow{F_{\text{Cor}\,i}},\ \overrightarrow{M_{\text{ext}}} + \sum \overrightarrow{M_{\text{ent}\,i}} + \sum \overrightarrow{M_{\text{Cor}\,i}}\right\} = \left\{\sum \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt},\ \sum \frac{d\overrightarrow{L_i}}{dt}\right\}$$

Attention ! Il faut bien comprendre que les vitesses des points d'applications des différentes forces ne sont pas *a priori* les mêmes. En conséquence, chaque force d'inertie doit être exprimée à l'endroit précis de son point d'application.

2.3. Puissance et travail d'un système de forces

Puissance d'une action mécanique

La puissance exercée par une action mécanique sur un système est égale à la somme des puissances exercées par chaque force agissant sur le système, exprimée en son point d'application. Pour un ensemble discret de forces, cela s'écrit :

$$\mathcal{P} = \sum_i \overrightarrow{F_i} \cdot \overrightarrow{v_i}$$

Remarque 1 : la puissance des actions mécaniques dépend bien sûr du référentiel dans lequel on l'exprime. En effet, si les forces sont indépendantes du référentiel, les vitesses $\overrightarrow{v_i}$ des points d'application de ces forces dépendent de $\mathcal{R}$.

Remarque 2 : le fait que la résultante des forces $\sum \overrightarrow{F_i}$ soit éventuellement nulle *n'implique pas* que la puissance des actions mécaniques le soit. Ceci était vrai pour un point matériel et cesse de l'être pour un système de points matériels pour lequel, *a priori*, les vitesses des points d'application des différentes forces sont différentes. En particulier, s'il est toujours possible de sérier les actions mécaniques en actions mécaniques intérieures et extérieures, la résultante des forces intérieures étant nulle, la puissance des forces intérieures n'est, en général, pas nulle.

Nous allons montrer cependant que la puissance des forces intérieure jouit d'une propriété particulière. La puissance des forces intérieure peut, dans le cas le plus général, s'exprimer en faisant apparaître des couples de points $\left(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j\right)$ en interaction et en ces points les forces $\overrightarrow{F_{ji}}$ et $\overrightarrow{F_{ij}}$ sont opposées. Cela permet de regrouper les termes de puissance qui leur sont associés :

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{F_{ji}} \cdot \overrightarrow{v_i} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \left(\overrightarrow{F_{ji}} \cdot \overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{F_{ij}} \cdot \overrightarrow{v_j} \right) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{F_{ji}} \cdot \left(\overrightarrow{v_i} - \overrightarrow{v_j} \right) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \overrightarrow{F_{ji}} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j}}{dt}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j}$ ainsi que les forces sont indépendants du référentiel dans lequel on les exprime. Nous en déduisons donc que la puissance des actions intérieures à un système est indépendante du référentiel dans lequel on l'exprime. Rappelons toutefois que cette puissance n'est *a priori* pas nulle.

Théorème de l'énergie cinétique

Ce qui est vrai pour chaque point matériel séparément est vrai par extension au système matériel tout entier, par sommation discrète ou intégrale selon qu'il s'agit d'un système de points matériels ou d'un système continu.

Nous pouvons ainsi exprimer, dans un référentiel galiléen, le théorème de l'énergie cinétique pour un système matériel en terme de puissance ou en terme de travaux.

Théorème de l'énergie cinétique en terme de puissance

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_{\mathrm{g}}$, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un système matériel est égale à la somme des puissances de l'ensemble des actions mécaniques, tant extérieures qu'intérieures, s'appliquant au système. La puissance des actions intérieures est indépendante du référentiel dans lequel on l'exprime.

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_{\mathrm{k}}}{dt}\right)_{\mathcal{R}_{\mathrm{g}}} = \mathcal{P}_{\mathrm{ext}/\mathcal{R}_{\mathrm{g}}} + \mathcal{P}_{\mathrm{int}}$$

Théorème de l'énergie cinétique en terme de travaux

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_{\mathrm{g}}$, la variation de l'énergie cinétique d'un système matériel entre un instant initial et un instant final est égale à la somme des travaux entre ces deux instants des actions mécaniques, tant extérieures qu'intérieures, s'appliquant au système.

$$\Delta\mathcal{E}_{\mathrm{k}\,\mathcal{R}_{\mathrm{g}}} = \mathcal{E}_{\mathrm{k}}\left(t_2\right)_{\mathcal{R}_{\mathrm{g}}} - \mathcal{E}_{\mathrm{k}}\left(t_1\right)_{\mathcal{R}_{\mathrm{g}}} = \mathrm{W}_{\mathrm{ext}\ t_1 \to t_2} + \mathrm{W}_{\mathrm{int}\ t_1 \to t_2}$$

Énergie potentielle

Définition

La description de la situation dans l'espace d'un système matériel nécessite la donnée d'un certain nombre de paramètres. Par exemple, pour un système de *n* points matériels libres de toute liaison, il faudra définir les positions dans l'espace de chaque point matériel, soit 3*n* paramètres scalaires. Un autre exemple : la situation dans l'espace d'un solide nécessite six paramètres scalaires, trois pour la position de son centre de masse et trois angles pour définir son orientation.

Nous noterons $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ l'ensemble minimal de paramètres scalaires nécessaires pour décrire la situation d'un système mécanique.

Une action mécanique est dite conservative et associée à une fonction énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ si son travail dans une évolution quelconque du système mécanique est égal à la variation entre l'état initial et l'état final de la fonction $\mathcal{E}_\mathrm{p}$. S'agissant d'actions mécaniques externes nous parlerons d'énergie potentielle externe, s'agissant d'actions mécaniques internes nous parlerons d'énergie potentielle interne.

Remarque : du fait même de cette définition, l'énergie potentielle d'un système mécanique n'est définie qu'à une constante additive près. Il nous appartiendra de choisir *a priori* la valeur de l'énergie potentielle dans une situation particulière.

Exemple d'énergie potentielle externe : champ de pesanteur uniforme

Le poids d'un système matériel dérive d'une fonction énergie potentielle. Dans le cas particulier (que nous envisagerons souvent) d'un champ de gravitation uniforme, la fonction énergie potentielle ne dépend que la cote z_G du centre de masse, que l'on peut alors appeler « *centre de gravité* », selon un axe orienté par $\vec{g}$.

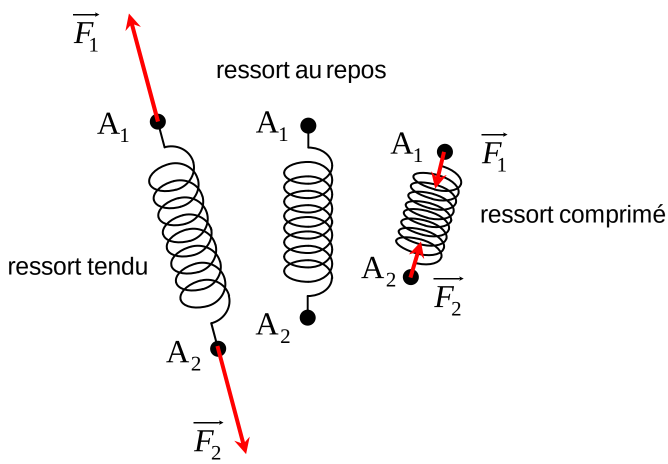
En effet, pour chaque point matériel nous pouvons associer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{\mathrm{p}i} = m_i g\, z_i$ (cette formule s'entend l'axe Oz étant orienté dans le sens opposé à $\vec{g}$). Nous définissons l'énergie potentielle du système matériel comme la somme des énergies potentielles des points matériels :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}i} = \sum \mathcal{E}_{\mathrm{p}i} = \sum m_i g\, z_i = m\, g\, z_\mathrm{G}$$

avec $m = \sum m_i$ et $m\, z_\mathrm{G} = \sum m_i z_i$

Exemple d'énergie potentielle interne : ressort hélicoïdal linéaire

Considérons un système mécanique comprenant un ressort linéaire constitué par enroulement hélicoïdal d'un fil métallique dont on négligera la masse. Les deux extrémités du ressort sont solidaires de points A_1 et A_2 du système. Sans autre contrainte extérieure, le ressort est en équilibre pour une longueur égale à ℓ_0 et dans une situation quelconque, la longueur ℓ du ressort définit totalement son état.



Il existe alors aux extrémités du ressort deux forces de tension opposées :

$$\vec{F_2} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_{12}} \quad \text{et} \quad \vec{F_1} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{e_{21}}$$

Pour un déplacement élémentaire quelconque $d\overrightarrow{A_1}$ et $d\overrightarrow{A_2}$ des points d'attache du ressort, le travail élémentaire de ces forces de tension s'écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{F_1}\cdot d\overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{F_2}\cdot d\overrightarrow{A_2} = \overrightarrow{F_1}\cdot\left(d\overrightarrow{A_1} - d\overrightarrow{A_2}\right) = \overrightarrow{F_1}\cdot d\overrightarrow{A_2A_1} = -k\left(\ell-\ell_0\right)d\ell = d\left(\frac{1}{2}k\left(\ell-\ell_0\right)^2\right)$$

Nous obtenons ainsi l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort hélicoïdal linéaire :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(\ell) = \frac{1}{2}k\left(\ell-\ell_0\right)^2 + C^{te}$$

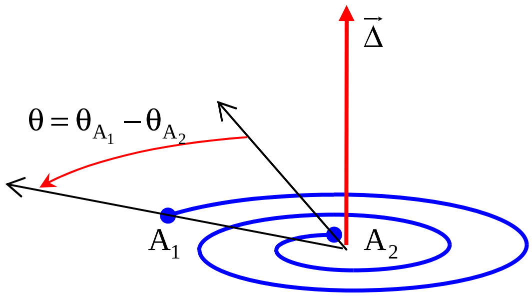
Remarque : la même expression de l'énergie potentielle s'appliquera dans le cas d'un fil (ou d'une barre) rectiligne élastique linéaire.

Exemple d'énergie potentielle interne : ressort spiral linéaire

Un ressort est constitué d'un enroulement plan de forme spirale autour d'un axe $\vec{\Delta}$ que l'on considérera fixe dans le référentiel d'étude. Il existe une situation « de repos » pour laquelle, l'écart angulaire entre les deux extrémités du ressort ayant pour valeur θ_0, la projection du moment de rappel sur l'axe $\vec{\Delta}$ est nulle.

Le ressort spiral est dit linéaire si le moment de rappel est proportionnel à l'angle de torsion du ressort (ainsi nomme-t-on la différence algébrique entre l'écart angulaire θ et l'écart angulaire de repos θ_0).

$$M_{\vec{\Delta}} = -C\left(\theta-\theta_0\right)$$



La constante C est la « constante de torsion » du ressort.

Pour un déplacement élémentaire de pure rotation des points de fixation du ressort, Le travail des couples opposés appliqués aux extrémités A_1 et A_2 du ressort s'écrit :

$$\delta W = M_1\,d\theta_{A_1} + M_2\,d\theta_{A_2} = -C\left(\theta-\theta_0\right)d\theta$$

Soit : $$\delta W = -d\left(\frac{1}{2}C\left(\theta-\theta_0\right)^2\right)$$

Nous en déduisons l'expression de l'énergie potentielle du ressort spiral linéaire :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(\theta) = \frac{1}{2}C\left(\theta-\theta_0\right)^2 + C^{te}$$

Remarque : La même forme d'énergie potentielle apparaît dans le cas d'un « fil de torsion » dont l'état mécanique est caractérisé de la même façon par un angle de torsion et dont l'élasticité, quand elle est supposée linéaire, est caractérisée par une constante de torsion que l'on notera généralement C.

Énergie mécanique et conditions de sa conservation

Théorème de l'énergie mécanique

On appelle énergie mécanique d'un système matériel la somme de son énergie cinétique et de toutes les énergies potentielles associées aux actions mécaniques conservatives, qu'elles soient intérieures ou extérieures.

Cette définition implique, dans un référentiel galiléen, le théorème de l'énergie mécanique que l'on peut exprimer en terme de puissance ou en terme de travaux.

Théorème de l'énergie mécanique en terme de puissance

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique d'un système matériel est égale à la somme des puissances de l'ensemble des actions mécaniques non conservatives, tant extérieures qu'intérieures, s'appliquant au système. Selon le second principe de la thermodynamique, la puissance des actions non conservatives est négative.

$$\left(\frac{d\left(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{p\,int} + \mathcal{E}_{p\,ext}\right)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{P}_{nc} < 0$$

Théorème de l'énergie mécanique en terme de travaux

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, la variation de l'énergie mécanique d'un système matériel entre un instant initial et un instant final est égale à la somme des travaux entre ces deux instants des actions mécaniques non conservatives, tant extérieures qu'intérieures, s'appliquant au système. Selon le second principe de la thermodynamique, le travail des actions non conservatives est négatif.

$$\Delta\left(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{p\,int} + \mathcal{E}_{p\,ext}\right)_{\mathcal{R}_g} = W_{nc\ t_1 \to t_2} < 0$$

Exemples d'actions mécaniques non conservatives

Les forces de frottement fluide, déjà étudiées en mécanique du point matériel, interviennent également en mécanique des systèmes et seront souvent modélisées sous forme de forces de frottement fluide linéaire, proportionnelles et opposées à la vitesse.

Nous étudierons particulièrement dans le chapitre suivant les actions de contact entre solides.

Attention ! Du fait de la possible existence de forces intérieures non conservatives, l'énergie mécanique d'un système isolé **n'est pas nécessairement** conservative.