

TRANSFERTS THERMIQUES

Chapitre 1

Conduction et convection

En thermodynamique, le terme de « chaleur » désigne une quantité d'énergie caractérisée par son mode de transfert, sans aucun déplacement macroscopique, par opposition au « travail ». L'expression « transfert thermique » préconisée par les programmes de physique des classes préparatoires est strictement équivalente au terme de chaleur. Cette expression nous évitera bien des confusions. La chaleur n'est pas une forme d'énergie, mais un mode de transfert de l'énergie : le transfert thermique.

Une bonne connaissance du premier et du second principe de la thermodynamique est indispensable pour aborder ce chapitre. Cf. THERMODYNAMIQUE DU CORPS PUR, chapitre 1 : Les principes de la thermodynamique.

1.1. Différents modes de transfert thermique

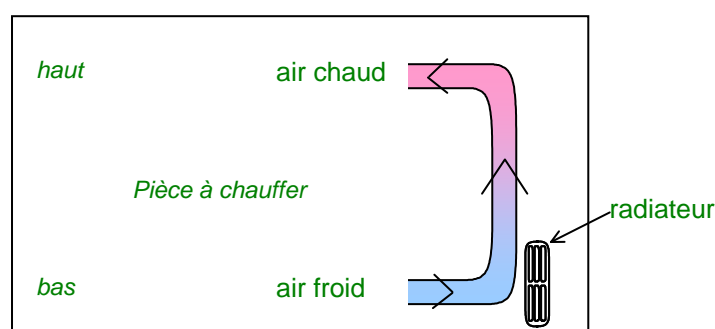
Conduction, ou diffusion

Si, du point de vue microscopique, l'énergie est transmise de proche en proche sans déplacement macroscopique de matière, il s'agit du phénomène de *diffusion* — ou *conduction* — thermique.

Convection

Dans un fluide, la conduction s'accompagne d'un processus de transfert thermique généralement plus efficace : la convection. L'énergie est alors transportée par déplacement macroscopique de matière. Les processus convectifs sont souvent couplés aux échanges thermiques par conduction au contact de solides.

Exemple : au contact du radiateur, l'air se réchauffe et s'élève du fait de sa plus faible densité. Il se crée ainsi un courant de convection qui fait que l'air de la pièce est chauffé dans son ensemble avec une plus grande efficacité.



Rayonnement

Enfin, il se produit toujours des échanges d'énergie avec le milieu extérieur sous forme de rayonnement électromagnétique, que l'on qualifie de transferts thermiques radiatifs. Dans étudierons particulièrement cet aspect des choses au chapitre suivant.

1.2. Loi de Fourier

Joseph Fourier

Mathématicien français, Joseph Fourier étudie au tout début du XIX^e siècle les phénomènes de conduction thermique, en ayant à l'esprit, comme la plupart de ses contemporains, l'idée de l'existence d'un fluide calorique indestructible. Ce modèle s'est avéré impropre : c'est l'énergie qui est conservative, la chaleur n'étant qu'un mode particulier de transport de l'énergie interne. Fourier avait connaissance des travaux de l'américain Benjamin Thompson mettant en évidence, dès 1798, la relation entre la chaleur et le mouvement. Ainsi, connaissant les discussions entre physiciens sur la nature de la chaleur, Fourier voulait que ses travaux soient appréciés indépendamment de l'issue de ce débat.

Cette position très prudente le conduisit à considérer les lois physiques comme la simple traduction mathématique des phénomènes observés. Fourier considérait que les lois dont il avait fait l'étude avaient une valeur indépendante de l'interprétation que l'on pouvait faire de la chaleur, celle-ci pouvant être considérée « comme un être matériel distinct, qui passe d'une partie de l'espace dans une autre », mais aussi « comme la seule transmission du mouvement ».

Pour l'histoire des sciences, le nom de Fourier reste attaché principalement à l'introduction d'un outil d'analyse d'une extraordinaire fécondité pour la physique. Fourier affirme, sans la démontrer tout à fait, la conjecture suivante : une fonction périodique quelconque, même discontinue, peut s'écrire sous la forme de la somme d'une série — éventuellement infinie, mais convergente —, de termes sinusoïdaux dont les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale. Nous étudierons à la section suivante dans quelles circonstances Fourier fut amené à faire cette hypothèse.

Courant thermique, flux thermique

Tout d'abord, Fourier remarqua que les transferts thermiques par conduction se font systématiquement des endroits où la température est la plus élevée vers les endroits où la température est la plus basse. Ce sera, un demi-siècle plus tard, l'énoncé de Clausius du second principe de la thermodynamique : aucun transfert thermique spontané ne peut avoir lieu du froid vers le chaud. La variation dans l'espace de la température est une condition nécessaire à l'apparition d'un phénomène de conduction. Il ne peut donc y avoir de conduction thermique qu'en dehors de l'équilibre thermique.

Fourier introduisit la notion de flux de chaleur que nous nommons aujourd'hui flux thermique afin d'éviter toute idée de préexistence de la chaleur comme fluide conservatif. Le flux thermique est une puissance, quotient par le temps d'observation de l'énergie traversant sous forme de chaleur une surface donnée. Le flux thermique, que nous noterons Φ , se mesure en watt dans le Système international d'unités.

En chaque point, nous définissons le vecteur densité surfacique de flux thermique ou vecteur densité de courant thermique \vec{j}_{th} comme le vecteur ayant pour direction et sens la direction et le sens du transport d'énergie sous forme de chaleur et ayant pour module le quotient du flux thermique à travers une surface élémentaire orthogonale par l'aire de cette surface. La densité de courant thermique se mesure donc, dans le Système international, en watt par mètre carré.

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{n} dS$$

Loi phénoménologique de Fourier

Fourier constata expérimentalement la proportionnalité du vecteur densité de courant thermique avec le gradient de température et posa la loi phénoménologique suivante, que nous appelons loi de Fourier :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overline{\text{grad} T}$$

Le coefficient de proportionnalité λ s'appelle la conductivité thermique et se mesure, dans le Système international, en watt par mètre et par kelvin ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). La conductivité thermique est positive, le signe « moins » présent dans la formule de Fourier exprime le fait que le transport thermique, conformément au second principe de la thermodynamique, se produit dans le sens des températures décroissantes, du plus chaud vers le plus froid.

Analogie de la loi d'Ohm avec la loi de Fourier

Nous constatons l'analogie formelle existant entre la loi de Fourier relative à la conduction thermique et la loi d'Ohm locale relative à la conduction électrique, dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires. Le vecteur densité de courant électrique correspond au vecteur densité de flux thermique, tandis que le potentiel électrique et la température jouent des rôles correspondants.

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overline{\text{grad} V}$$

La loi d'Ohm fut établie par analogie avec la loi de Fourier. Rendons hommage à Fourier en lui reconnaissant l'antériorité historique. Ohm ne publia sa loi qu'en 1827 dans son « *Étude mathématique de la chaîne galvanique* ». Il fait référence de façon explicite aux travaux de Joseph Fourier et introduit la notion de résistance électrique à partir d'une analogie avec la conduction thermique en régime continu forcé, telle que nous l'étudierons plus loin.

De fait, la conductivité électrique et la conductivité thermique ne sont pas sans rapport. Nous constatons que les matériaux bons conducteurs de l'électricité sont aussi de bons conducteurs thermiques, tandis que les isolants électriques sont de bien piètres conducteurs thermiques.

Limites de validité de la loi de Fourier

Limite de causalité

La loi de Fourier, comme la loi d'Ohm, affirme une relation causale instantanée. Si l'on modifie le gradient de température, cela a pour effet immédiat de modifier le courant de diffusion thermique. Ceci ne peut être acceptable que dans la mesure où le temps de propagation des causes est suffisamment bref. Dans le cas de régimes statiques ou lentement variables, il n'y aura pas de problème, mais dans le cas de régimes variables à des fréquences trop élevées, les retards entre les causes et les effets se font sentir et la loi de Fourier cesse d'être vérifiée.

Défaut d'isotropie

En tout état de cause, la loi de Fourier est une loi phénoménologique exprimant un phénomène physique dans un milieu supposé isotrope. Il existe des milieux anisotropes dans lesquels la conduction thermique ne se manifeste pas de la même façon dans toutes les directions de l'espace. Par exemple, un matériau ligneux comme le bois est meilleur conducteur thermique dans la direction des fibres que dans une direction orthogonale.

Défaut de linéarité

La loi de Fourier exprime un phénomène physique dans le cadre de son approximation linéaire. Comme bien souvent, la linéarité cessera d'être une approximation satisfaisante si l'amplitude du phénomène physique devient trop grande. Le déséquilibre thermique ne doit pas être trop important, un gradient de

température trop élevée pouvant avoir pour conséquence une non-linéarité qui peut aller, dans des conditions de déséquilibre thermique extrême, jusqu'à l'impossibilité de définir localement la température.

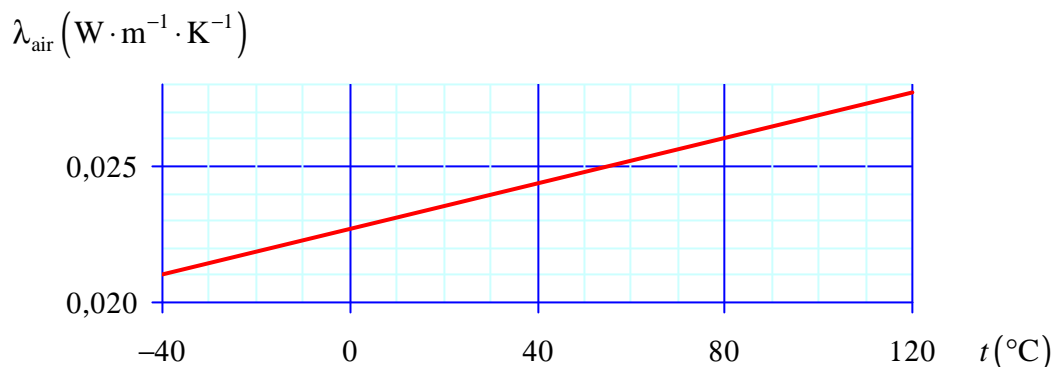
Différents aspects de la diffusion thermique

Les processus de diffusion qui sont responsables du déplacement de l'énergie interne, de proche en proche, dans la matière sont très variés et nous n'en ferons pas ici une étude microscopique. Nous allons simplement rendre compte qualitativement, selon l'état de la matière, de quelques différents modes opératoires diffusifs.

Diffusion thermique dans les gaz

Dans un gaz, le transport d'énergie interne se fait par l'intermédiaire des chocs moléculaires. Les molécules tendent à se déplacer vers les lieux où leur concentration est la plus faible (*loi de Fick*). Les chocs moléculaires tendent à déplacer l'énergie vers les endroits où la concentration d'énergie interne est la plus faible, c'est-à-dire là où la température est la plus basse. Nous nous attendons, par conséquent, à ce que le phénomène de diffusion thermique gazeuse obéisse à des lois ressemblant aux lois de la diffusion moléculaire dans les gaz.

Les conductivités thermiques de gaz sont des fonctions croissantes de la température et ne dépendent que très peu de la pression — tout au moins tant que celle-ci est suffisante pour que le libre parcours moyen des molécules soit très inférieur aux dimensions de l'enceinte. Le graphe ci-dessous reproduit, à titre d'exemple, les variations avec la température de la conductivité thermique de l'air.



Pour les gaz aux pressions usuelles, ces processus de diffusion moléculaire et de diffusion thermique sont très peu efficaces au regard des échanges qui se produisent du fait des déplacements de matière par convection et celle-ci est rarement évitable. Dans un champ de pesanteur, elle se produit naturellement du seul fait de la variation de densité du gaz avec la température. Une cellule mésoscopique de gaz de température plus élevée est soumise à une force ascendante et se met en mouvement.

Ce processus de convection se traduit, comme dans le cas de la conduction, par le déplacement de l'énergie interne vers les endroits où la température est la plus basse. L'efficacité des transferts convectifs peut être encore améliorée en forçant un régime d'écoulement du gaz. Ces phénomènes de convection font qu'il est tout à fait exceptionnel d'observer expérimentalement la diffusion thermique gazeuse comme processus isolé. Nous étudierons en exercice, à titre d'exemple, de quelle façon la convection gazeuse autour d'un solide peut conduire au refroidissement de ce dernier.

Diffusion thermique dans les liquides

Nous le savons, il n'y a pas de différence qualitative entre les liquides et les gaz autre que l'ordre de grandeur de la densité moléculaire. Les mêmes processus de conduction et de convection se produisent dans les liquides avec une efficacité accrue du fait de la plus grande concentration moléculaire.

Toutefois, dans les liquides, les molécules ou les atomes sont au contact. Cela a pour effet de rendre les processus d'échange énergétique plus efficaces. De plus, il peut se produire dans une phase condensée, des phénomènes de conduction n'ayant pas pour origine le transfert d'énergie de proche en proche par les atomes : dans le mercure liquide, par exemple, l'existence d'électrons libres responsables de la conduction électrique, rend la conduction thermique particulièrement efficace.

Le tableau ci-contre donne quelques exemples de conductivité thermique pour des liquides à la température de 25°C.

	$\lambda \text{ (W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}\text{)}$
toluène	0,14
éthanol	0,17
eau	0,59
mercure	8,30

Diffusion thermique dans les solides

Dans les solides, il ne saurait être question de chocs entre atomes. L'énergie vibratoire des atomes se déplace de proche en proche par des processus d'interaction entre voisins. Ce phénomène concerne tous les solides qu'ils soient conducteurs de l'électricité ou non.

Dans le cas des matériaux conducteurs électriques, le transfert de charge est rendu possible par l'existence d'électrons de conduction qui peuvent être mis en mouvement par une excitation infime. Ces mêmes électrons vont participer à la conduction thermique avec une efficacité toute particulière. Sans entrer dans les détails, nous devons constater que les meilleurs conducteurs électriques (l'argent, le cuivre et l'or) sont aussi les meilleurs conducteurs thermiques. Dans les conditions usuelles, les conductivités thermiques des métaux ne dépendent que très peu de la température. A la même température, le rapport est du même ordre de grandeur pour tous les métaux. Le tableau suivant donne les valeurs de λ , γ et du rapport λ/γ pour quelques métaux usuels à la température de 20°C.

	Conductivité thermique λ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	Conductivité électrique γ ($\times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$)	rapport λ/γ ($\times 10^6 \Omega \cdot \text{W} \cdot \text{K}^{-1}$)
Argent	429	63	6,8
Cuivre	401	60	6,7
Or	318	43	7,5
Aluminium	236	38	6,2
Zinc	116	17	6,9
Fer	80	10,3	7,8
Plomb	35	4,8	7,2

Les conductions thermiques des alliages sont généralement inférieures à celles des métaux entrant dans leur composition. Ainsi, par exemple, le laiton — alliage de cuivre et de zinc — a une conductivité thermique inférieure à celle du zinc : $\lambda_{\text{laiton}} = 110 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

De même, les différentes sortes de fonte et d'acier ont des conductivités thermiques inférieures à celle du fer. Pour l'acier inox, par exemple : $\lambda_{\text{inox}} = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Voici enfin, dans un dernier tableau, les valeurs de conductivité thermique de quelques matériaux isolants dans leurs conditions usuelles d'utilisation.

	$\lambda \text{ (W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}\text{)}$
marbre	3,3
Bois d'érable	0,16
verre	1,2
Laine de verre	0,040

1.3. Régimes permanents de diffusion

Régimes forcés, présence de thermostats

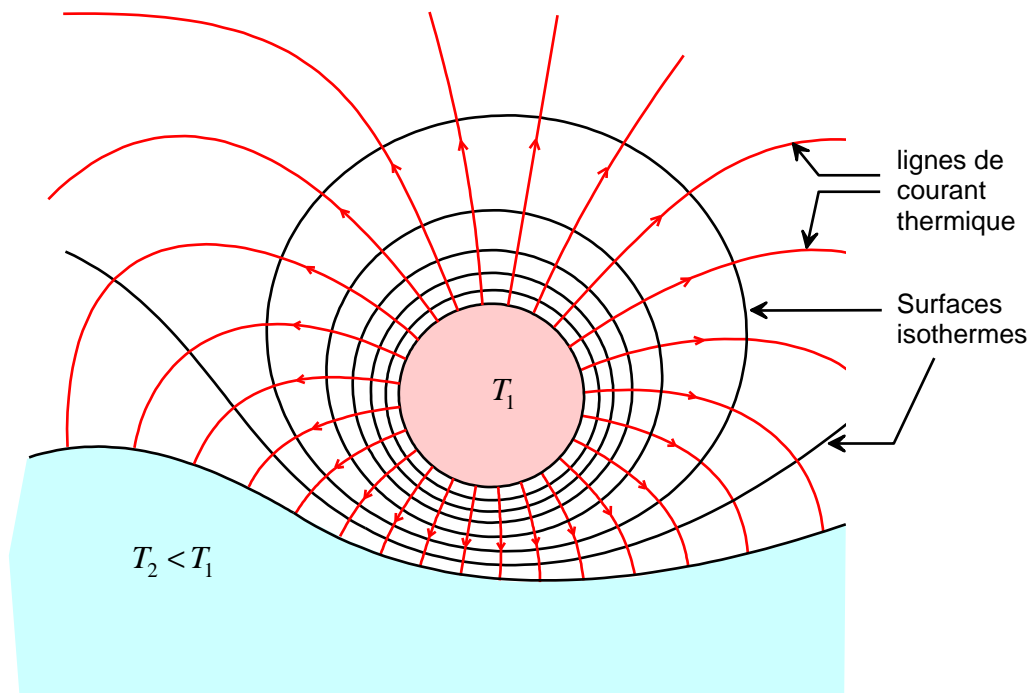
La diffusion, nous l'avons vu, conduit inexorablement à une uniformisation des températures. De ce fait, pour un système isolé, il ne peut exister de solution de diffusion stationnaire.

Toutefois, si nous envisageons l'existence de thermostats, qui sont des sources d'énergie, le système évolue vers un régime stationnaire d'écoulement de l'énergie, sous forme de chaleur, des thermostats les plus chauds vers les thermostats les plus froids. Nous pouvons étudier quelles sont les répartitions stationnaires de température dans un milieu conducteur soumis à de telles conditions aux limites.

Nous savons que la température est alors solution d'une équation formellement identique à l'équation de Poisson en électrostatique :

$$\Delta T = 0$$

Dans certaines circonstances particulières présentant un degré de symétrie suffisant, nous saurons résoudre cette équation. Toute analogie avec des problèmes équivalents de potentiels statiques (ou quasi stationnaires) déjà étudiés en électricité sera la bienvenue pour ces études.



Régime forcé continu d'écoulement thermique

Nous mettrons ainsi en évidence l'existence de surfaces isothermes (les surfaces des thermostats sont de cette nature) et de lignes de courants thermiques, orthogonales aux surfaces isothermes, de la même façon qu'en électrostatique ou en électrocinétique quasi stationnaire les lignes de champ électrique sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

Résistance thermique

Cas général

Considérons un écoulement thermique quelconque entre deux thermostats. Le flux thermique total (homogène à une puissance) est proportionnel à la différence de température entre les deux thermostats.

Le coefficient de proportionnalité s'appelle la conductance thermique G_{th} du milieu conducteur entre les deux thermostats. L'inverse de la conductance thermique s'appelle la résistance thermique R_{th} :

$$\Phi = G_{th} (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}$$

La conductance thermique entre deux thermostats d'un milieu conducteur homogène est proportionnelle à la conductivité thermique λ du matériau. Elle dépend également de la forme et de la disposition des thermostats, mais elle est indépendante de leurs températures dans la mesure où la conductivité thermique λ du matériau peut elle-même être considérée comme indépendante de T .

Cas particulier unidimensionnel

Considérons le cas particulier d'un système tel que sa température n'est fonction que d'une seule coordonnée cartésienne x de l'espace. C'est le cas, par exemple, en une bonne approximation, de la température dans un mur homogène d'épaisseur uniforme ℓ lorsque les températures T_1 et T_2 de part et d'autre du mur sont uniformes et constantes. L'équation de la chaleur s'écrit alors, en régime stationnaire :

$$\Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Le gradient de température dans le mur est donc uniforme et constant et nous en déduisons que la température dans l'épaisseur du mur varie linéairement en fonction de x :

$$\left| \overrightarrow{\text{grad}} T \right| = \left| \frac{dT}{dx} \right| = \frac{|T_1 - T_2|}{\ell}$$

Si l'on considère une section s du mur, le flux thermique Φ à travers cette section a pour expression :

$$\Phi = s \left| \overrightarrow{j}_{th} \right| = s \lambda \left| \overrightarrow{\text{grad}} T \right| = \frac{s \lambda}{\ell} |T_1 - T_2| = \frac{|T_1 - T_2|}{R_{th}}$$

Nous en déduisons l'expression de la résistance thermique d'un élément cylindrique d'un matériau homogène de conductivité λ , de section s et de longueur ℓ dans l'approximation unidimensionnelle :

$$R_{th} = \frac{\ell}{s \lambda}$$

Remarque : en 1827, Georg Ohm s'est inspiré de ce concept de résistance thermique introduit par Fourier pour définir la résistance électrique d'un dipôle. L'expression de la résistance électrique d'un conducteur cylindrique de conductivité électrique γ , de section s et de longueur ℓ est obtenue par analogie, dans le cadre de la même approximation unidimensionnelle :

$$R_{elec} = \frac{\ell}{s \gamma}$$

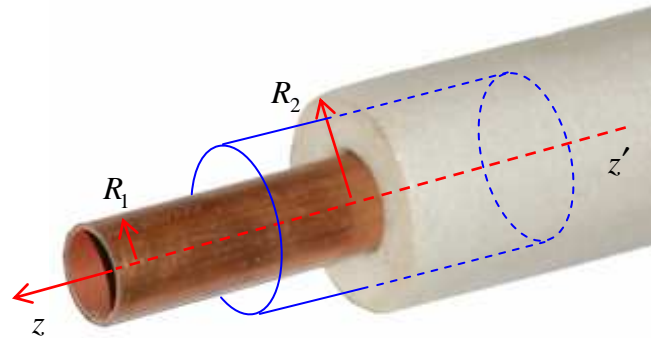
Résistances électriques et résistances thermiques obéissent aux mêmes règles d'association en parallèle (lorsque les flux s'ajoutent) et d'association en série (lorsque le même flux passe successivement dans différents conducteurs).

— La conductance résultante est égale à la somme des conductances de conducteurs associés en parallèle.

— La résistance résultante est égale à la somme des résistances de conducteurs associés en série.

Conduction thermique à symétrie cylindrique de révolution

Soit un tuyau cylindrique de rayon R_1 transportant un fluide chaud à une température T_1 que l'on considèrera comme uniforme et invariante. Le tuyau est calorifugé à l'aide d'une gaine cylindrique de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 constituée d'un matériau homogène de faible conductivité thermique λ . Le milieu extérieur est assimilable à un thermostat de température T_2 .



Il s'établit alors un régime stationnaire de fuite thermique que nous allons étudier dans le système de coordonnées cylindriques d'axe $z'z$. La densité de courant thermique est radiale et son module j_{th} ne peut dépendre que de la distance r à l'axe $z'z$. Le flux thermique Φ à travers un cylindre de rayon r ($R_1 < r < R_2$) et de longueur ℓ a donc pour expression : $\Phi = 2\pi r \ell j_{th}$. Ce flux est indépendant du rayon r et nous en déduisons l'expression du vecteur densité de courant thermique :

$$\vec{j}_{th} = \frac{\Phi}{2\pi r \ell} \vec{e}_r$$

Dans cet environnement à symétrie cylindrique, la température ne dépend également que de la distance r . Aussi, la loi de Fourier s'écrit-elle $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$ et nous en déduisons la loi de variation de

la température dans le matériau isolant : $\frac{dT}{dr} = -\frac{\Phi}{2\pi r \ell \lambda}$ soit $T(r) = T_1 - \frac{\Phi}{2\pi \ell \lambda} \ln \frac{r}{R_1}$

Cette relation étant satisfaite en particulier pour $r = R_2$, nous en déduisons la relation de proportionnalité entre la différence de température et le flux thermique :

$$T_1 - T_2 = \left(\frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{\Phi}{\ell}$$

Cette relation définit une conductance thermique linéique $\frac{G_{th}}{\ell} = \frac{1}{2\pi \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}$

Bien entendu, ces fuites thermiques sont d'autant plus importantes que l'on considère une grande longueur de tuyau.

Remarque 1 : cet exercice est formellement identique au calcul de la conductance de fuite d'un condensateur cylindrique.

Remarque 2 : nous pouvons également envisager un régime permanent de conduction à symétrie sphérique. Le courant thermique est alors radial (au sens sphérique du terme) et le module de la densité de courant thermique décroît en $1/r^2$ de telle sorte que le flux thermique soit le même à travers toute surface sphérique, indépendamment de la valeur de r .

1.4. Équation de la diffusion thermique

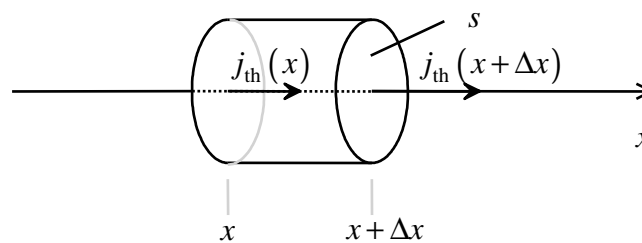
Bilan d'énergie

Considérons un système matériel de composition physico-chimique uniforme et constante, non traversé par des courants électriques, immobile dans un référentiel d'inertie et supposé indéformable. Seuls des transferts thermiques sont susceptibles de faire varier l'énergie de ce système. Nous nous proposons d'écrire l'équation différentielle exprimant localement le caractère conservatif de l'énergie.

Problème unidimensionnel

Imaginons tout d'abord le cas limite d'un système dont les paramètres d'état ne sont fonction que du temps t et d'une seule coordonnée cartésienne x . Nous allons montrer que la conservation de l'énergie implique une relation simple entre la variation dans le temps de l'énergie volumique et la variation dans l'espace de la densité de courant thermique.

Considérons à cet effet un tube de courant thermique cylindrique de section s . À l'abscisse x , la densité de courant thermique a pour valeur $j_{th}(x)$ et à l'abscisse $x + \Delta x$ une valeur différente $j_{th}(x + \Delta x)$.



Dans un intervalle de temps Δt , l'énergie entrant sous forme de chaleur dans le volume cylindrique $s \Delta x$ à l'abscisse x est égale à $j_{th}(x)s \Delta t$, tandis que l'énergie sortant sous forme de chaleur du même volume à l'abscisse $x + \Delta x$ dans le même intervalle de temps a pour valeur $j_{th}(x + \Delta x)s \Delta t$. L'évolution se faisant sans apport d'énergie sous forme de travail, l'énergie interne du système de volume $s \Delta x$ varie donc, dans l'intervalle de temps Δt , de la quantité :

$$U(x + \Delta x) - U(x) = [j_{th}(x + \Delta x) - j_{th}(x)]s \Delta t$$

Ceci correspond à une variation de l'énergie volumique qui s'écrit :

$$\Delta U_V = \frac{j_{th}(x + \Delta x) - j_{th}(x)}{\Delta x} \Delta t$$

$U_V(x, t)$ et $j_{th}(x, t)$ sont fonction *a priori* de deux variables x et t . Lorsque l'on fait tendre Δx et Δt vers zéro, on obtient la relation entre les dérivées partielles, que l'on appelle équation de continuité, traduisant localement la loi de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial U_V}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}}{\partial x} = 0$$

Cas général

Le calcul précédent se généralise au cas d'un vecteur densité de courant thermique \overline{j}_{th} quelconque.

Il suffit alors de considérer un volume élémentaire parallélépipédique $dV = dx dy dz$ et de faire le même raisonnement en considérant trois contributions à la variation de l'énergie interne volumique, selon chacune des directions cartésiennes :

$$\frac{\partial U_V}{\partial t} + \frac{\partial j_{th,x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{th,y}}{\partial y} + \frac{\partial j_{th,z}}{\partial z} = \frac{\partial U_V}{\partial t} + \text{div} \overline{j}_{th} = 0$$

Dans le cas le plus général, il peut exister des causes de variation de l'énergie interne volumique qui ne sont pas exprimées par le transfert thermique. Nous avons vu en électromagnétisme l'existence d'une puissance volumique $\mathcal{P}_V = \overline{j} \cdot \overline{E}$, cédée par le champ électromagnétique à la matière. Le milieu matériel peut également être le siège de réactions chimiques exothermiques, ce qui se traduirait par une puissance reçue \mathcal{P}_V positive, ou de réactions chimiques endothermique, ce qui se traduirait par une puissance reçue \mathcal{P}_V négative. Il peut également s'agir de changement de phase ou de réactions nucléaires. Dans le cas le plus général, si nous notons \mathcal{P}_V la somme algébrique de toutes les puissances volumiques produites au cœur du système, l'équation de continuité relative à l'énergie interne s'écrit :

$$\frac{\partial U_V}{\partial t} + \text{div} \overline{j}_{th} = \mathcal{P}_V$$

Remarque : nous rencontrerons une équation de ce type dès lors qu'il s'agira de traduire localement une loi de conservation d'une grandeur physique scalaire.

Par exemple, la conservation de la charge électrique se traduit par une relation du même type entre la densité de courant \overline{j} et la densité volumique de charge électrique ρ : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \overline{j} = 0$.

Deuxième exemple, la loi de Poynting traduisant la non conservation de l'énergie électromagnétique. Si l'on note $U_{Vem} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ la densité volumique d'énergie électromagnétique et $\overline{\Pi} = \frac{\overline{E} \wedge \overline{B}}{\mu_0}$ le vecteur de Poynting, le théorème de Poynting a pour expression locale :

$$\frac{\partial U_{Vem}}{\partial t} + \text{div} \overline{\Pi} = -\overline{j} \cdot \overline{E}$$

Le flux du vecteur de Poynting représente la puissance électromagnétique sortante tandis que $\overline{j} \cdot \overline{E}$ représente la puissance transférée aux porteurs de charge, ou puissance « perdue » par effet Joule.

Équation de la chaleur

La loi de Fourier $\overline{j}_{th} = -\lambda \overline{\text{grad}} T$ combinée avec l'équation de continuité $\frac{\partial U_V}{\partial t} + \text{div} \overline{j}_{th} = \mathcal{P}_V$ conduit, dans un milieu où l'on peut considérer la conductivité thermique λ comme indépendante de la température, à l'équation de la diffusion thermique, équation différentielle aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport au temps et du second ordre par rapport à l'espace :

$$\frac{\partial U_V}{\partial t} - \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial U_V}{\partial t} - \lambda \Delta T = \mathcal{P}_V$$

Introduisons la capacité thermique massique c du matériau et sa masse volumique μ que nous considérerons l'une et l'autre comme indépendantes de la température. Rappelons que nous avons admis que l'énergie interne ne peut varier que du seul fait de la variation de température du milieu. Nous avons alors, dans les conditions particulières de notre étude, $dU_V = \mu c dT$. Dès lors, l'équation de la diffusion thermique devient une équation différentielle de la seule température, que l'on appelle équation de la diffusion thermique, ou encore « équation de la chaleur » :

$$\Delta T - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\mathcal{P}_V}{\lambda} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{\mu c}$$

Le coefficient $D = \frac{\lambda}{\mu c}$, homogène à une surface divisée par un temps, est un paramètre intensif positif, caractéristique du matériau, que l'on appelle *diffusivité thermique*, ou *coefficient de diffusion thermique*.

L'étude générale de l'équation de la chaleur est d'une extrême complexité et il n'est pas question d'aborder ici quelque méthode que ce soit de résolution systématique de ce problème. Dans tous les cas, la résolution d'une telle équation suppose que l'on définisse des conditions aux limites pour le problème de diffusion. Nous allons simplement étudier quelques propriétés générales des phénomènes de diffusion dont la signification physique est remarquable.

Nous étudierons un cas particulier de phénomène d'égalisation thermique et nous comprendrons le rapport entre cette étude de la diffusion thermique et les séries trigonométriques de Fourier. Pour un tel problème, les conditions aux limites sont des conditions initiales : nous supposons connue la répartition de température à l'instant $t = 0$.

Nous envisagerons le cas particulier des régimes permanents forcés. Nous supposons que la température est établie de façon stationnaire dans tout l'espace et l'équation de la chaleur indépendante du temps s'écrit $\Delta T = 0$. Il s'agit alors d'une équation équivalente à l'équation de Poisson en électrostatique et nous pourrions dans certains cas procéder par analogie en nous appuyant sur quelques connaissances de cette discipline. Les conditions aux limites sont alors exprimées dans l'espace : la température est supposée connue en certains endroits.

Enfin, nous étudierons, en guise d'exercice complémentaire, le cas particulier des régimes sinusoïdaux forcés. Les conditions aux limites s'expriment alors sous forme d'une fonction particulière $T(t)$ imposée en un lieu choisi pour origine de l'espace.

Irréversibilité de la diffusion thermique

Le phénomène de diffusion thermique tend à homogénéiser les températures : c'est un phénomène fondamentalement irréversible.

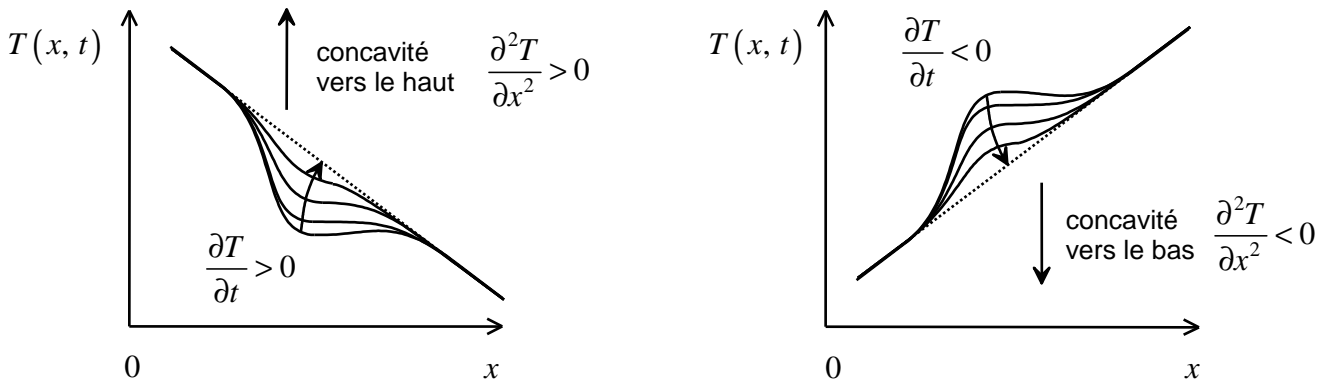
Cela se traduit par le fait que l'équation de la chaleur n'est pas invariante par changement du signe du temps : si $T(x, y, z, t)$ en est une solution, alors $T(x, y, z, -t)$ n'en est pas une.

Observons le cas unidimensionnel. Imaginons une distribution de température telle qu'à un instant donné la courbe $T(x, t)$ présente une concavité tournée vers les valeurs positives de T .

Nous avons alors $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0$ et, selon l'équation de la chaleur, dans une telle région d'espace, la fonction

$T(x, t)$ est une fonction croissante du temps : $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} > 0$

L'évolution irréversible due à la diffusion thermique ramène systématiquement la distribution de température vers un gradient uniforme auquel correspond un transfert d'énergie interne des lieux où la température est la plus élevée vers les lieux où la température est la plus basse. Nous retrouvons tout naturellement l'énoncé de Clausius du second principe de la thermodynamique.



Analyse dimensionnelle

Introduisons deux variables réduites $\tau = \frac{t}{\tau}$ et $\mathbf{x} = \frac{x}{\ell}$ et supposons $T(x, t)$ solution de l'équation de la chaleur pour des conditions aux limites particulières :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{1}{D\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$$

Si nous choisissons τ et ℓ tels que $\frac{\ell^2}{\tau} = D$, alors la fonction $T(\mathbf{x}, \tau)$ est solution d'une équation

différentielle canonique, indépendante du milieu matériel dans lequel a lieu la diffusion : $\frac{\partial^2 T}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$

Nous pouvons interpréter ceci aussi bien en disant que les temps de diffusion sont proportionnels aux carrés des distances parcourues et inversement proportionnels aux diffusivités thermiques ou en disant que, pour une durée donnée, les profondeurs de pénétration sont proportionnelles à la racine carrée du produit de cette durée par la diffusivité thermique.

Étude d'une égalisation thermique : le problème de l'anneau d'ancrage

Joseph Fourier étudie la propagation thermique dans un anneau d'ancrage de navire. L'anneau de fer est initialement chauffé au rouge sur une moitié avant d'être enfoui dans du sable où l'on mesure l'évolution de la température du métal. Le sable constitue un excellent isolant permettant de minimiser les pertes thermiques. Nous ferons l'hypothèse, dans cette étude, que ces pertes sont négligeables dans le temps d'observation.

En première approximation, nous pouvons considérer que le problème est unidimensionnel — seule intervient l'abscisse curviligne x sur l'anneau — et que les conditions initiales correspondent à un créneau de température, T_1 étant la température uniforme de la moitié de l'anneau qui a été chauffée et T_2 la température uniforme de l'autre moitié de l'anneau.

Nul ne savait, à l'époque de Fourier, résoudre l'équation de la chaleur avec une telle symétrie et de telles conditions initiales. Toutefois, cette équation admet des solutions simples dans le cas où les conditions initiales correspondent à une distribution sinusoïdale de température.

Solutions harmoniques

ℓ étant la longueur de la circonférence de l'anneau — supposé filiforme — et n étant un nombre entier, considérons une distribution initiale de température décrite par une fonction sinusoïdale de la forme :

$$T(x, 0) = \langle T \rangle + \theta_0 \cos \frac{2\pi n x}{\ell}$$

$\langle T \rangle$ est la température initiale moyenne. Nous verrons que la température moyenne est invariante dans le cadre de nos hypothèses.

La température initiale est maximale en $x = 0$ (modulo ℓ/n) où elle a pour valeur $T_{\max} = \langle T \rangle + \theta_0$ et elle est minimale en $x = \ell/2n$ (modulo ℓ/n), le minimum ayant pour valeur : $T_{\min} = \langle T \rangle - \theta_0$.

Démontrons qu'il existe une solution de l'équation de la chaleur, satisfaisant aux conditions aux limites sinusoïdales, de la forme :

$$T(x, t) = \langle T \rangle + \theta(t) \cos \frac{2\pi n x}{\ell}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{d\theta(t)}{dt} \cos \frac{2\pi n x}{\ell} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= -\left(\frac{2\pi n}{\ell}\right)^2 \theta(t) \cos \frac{2\pi n x}{\ell} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} - D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left(\frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{4\pi^2 n^2 D}{\ell^2} \theta(t) \right) \cos \frac{2\pi n x}{\ell} = 0$$

L'équation de la chaleur se ramène donc à une équation différentielle linéaire du premier ordre en $\theta(t)$:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} + n^2 \frac{\theta(t)}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\ell^2}{4\pi^2 D}$$

La solution générale est de la forme $\theta(t) = A e^{-n^2 \frac{t}{\tau}}$ et il suffit de choisir $A = \theta_0$ pour que les conditions initiales soient satisfaites.

La fonction $T(x, t)$ s'écrit finalement :

$$T(x, t) = \langle T \rangle + \theta_0 e^{-n^2 \frac{t}{\tau}} \cos \frac{2\pi n x}{\ell} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\ell^2}{4\pi^2 D}$$

Nous constatons que la constante de temps τ/n^2 de l'égalisation thermique est proportionnelle au carré de la distance ℓ/n séparant deux maxima consécutifs : ce résultat est tout à fait caractéristique d'un processus diffusif linéaire.

La conjecture de Fourier

Fourier affirme que toute distribution initiale de température dans l'anneau $T_0(x)$, telle que $T_0(x + \ell) = T_0(x)$, peut se décomposer d'une façon unique en une somme de distributions sinusoïdales éventuellement infinie :

$$T_0(x) = \langle T \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{\ell} \right)$$

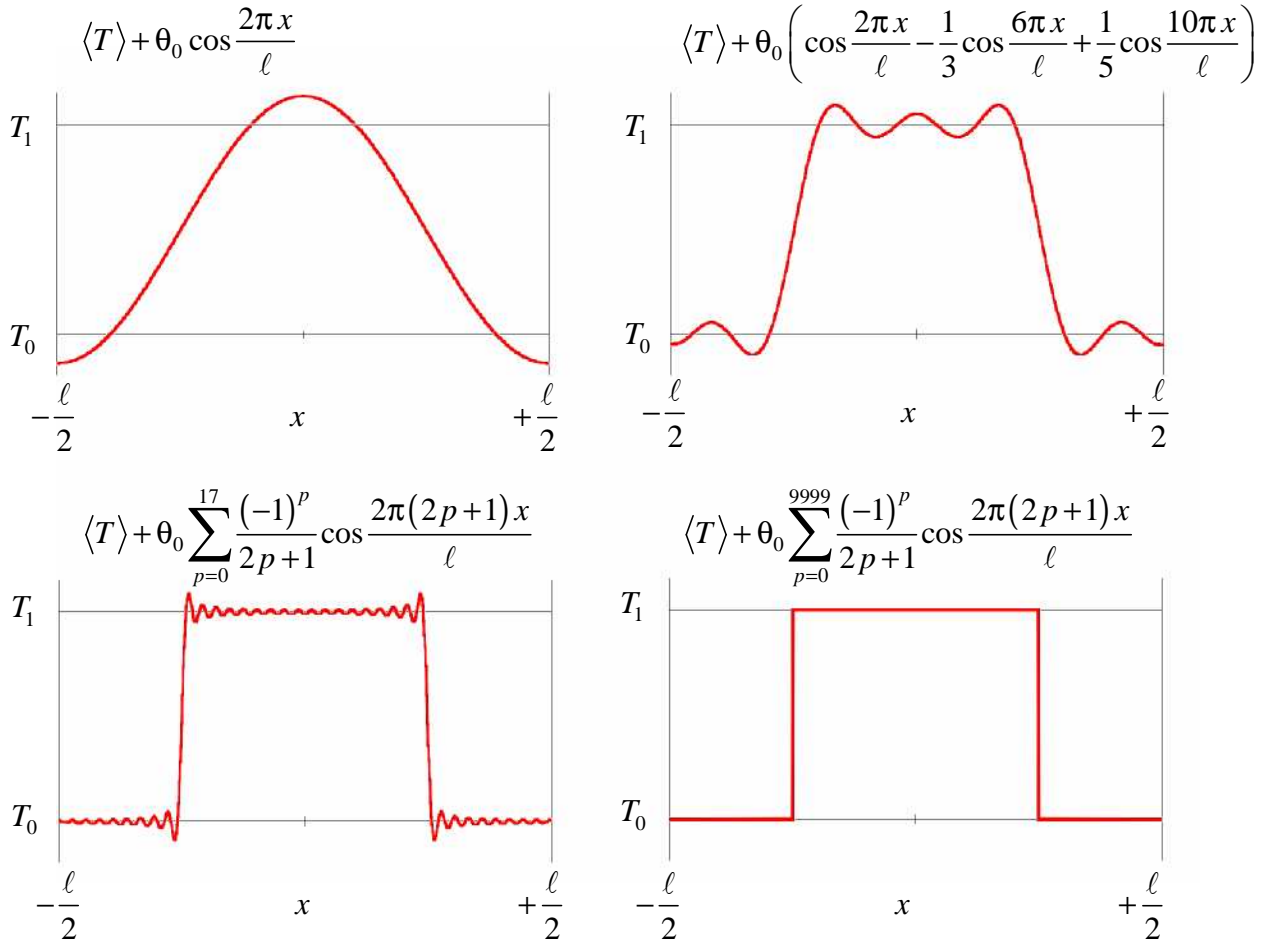
Les coefficients a_n et b_n , que l'on appelle *coefficients de Fourier*, sont donnés par les expressions intégrales suivantes :

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} T_0(x) \cos \frac{2\pi n x}{\ell} dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} T_0(x) \sin \frac{2\pi n x}{\ell} dx$$

Dans le cas de la fonction créneau évoquée pour le problème de l’anneau d’ancrage, le développement en série de Fourier s’écrit :

$$T_0(x) = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{2}{\pi}(T_1 - T_0) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos \frac{2\pi(2p+1)x}{\ell}$$

La figure suivante représente le fondamental, la somme des trois premiers harmoniques, la somme des 18 premiers harmoniques et la somme des dix mille premiers harmoniques. Pour cette dernière représentation, le grain du papier ne permet plus de faire la moindre différence avec la fonction créneau.

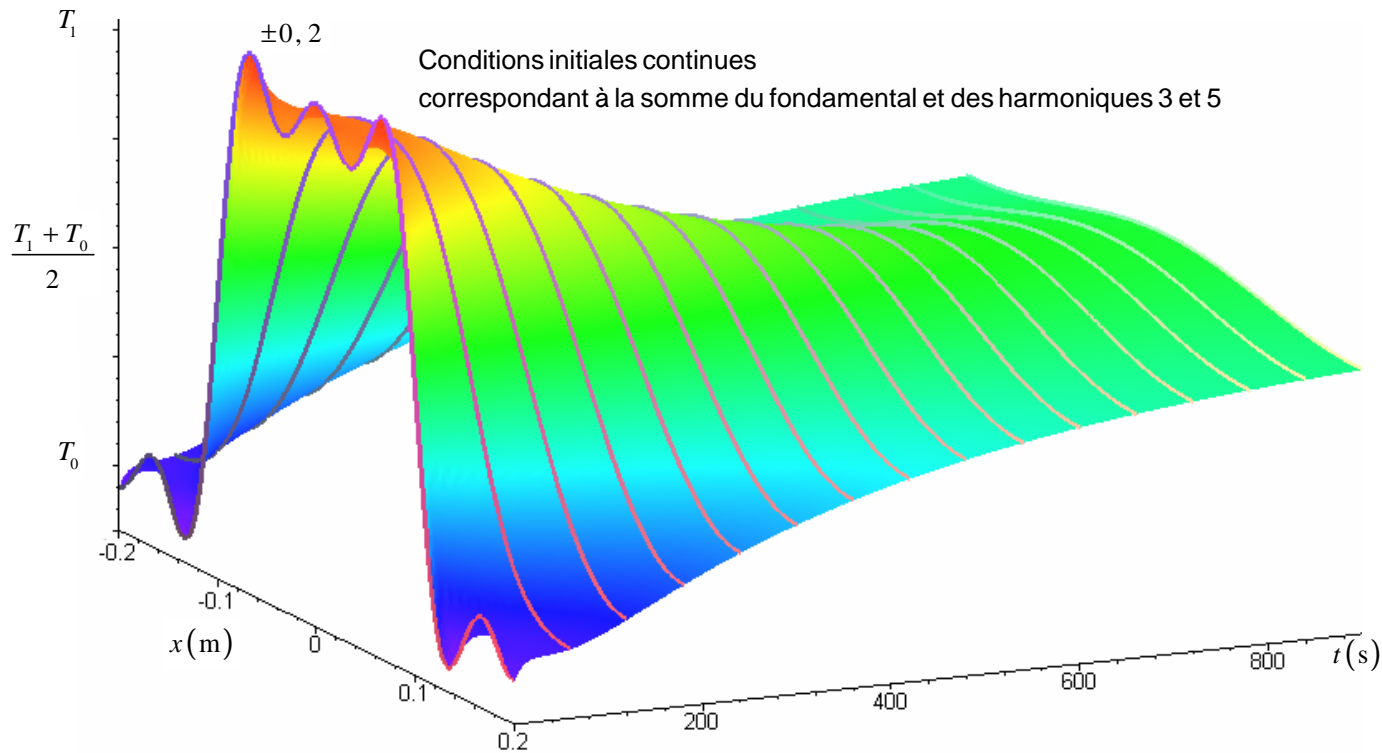
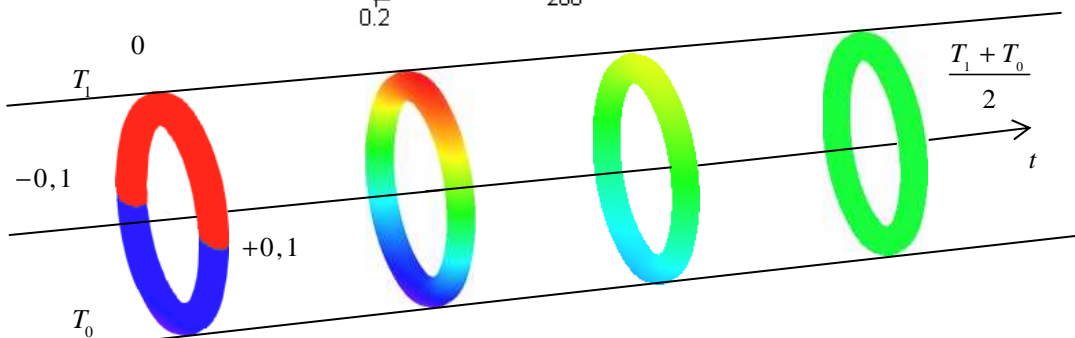
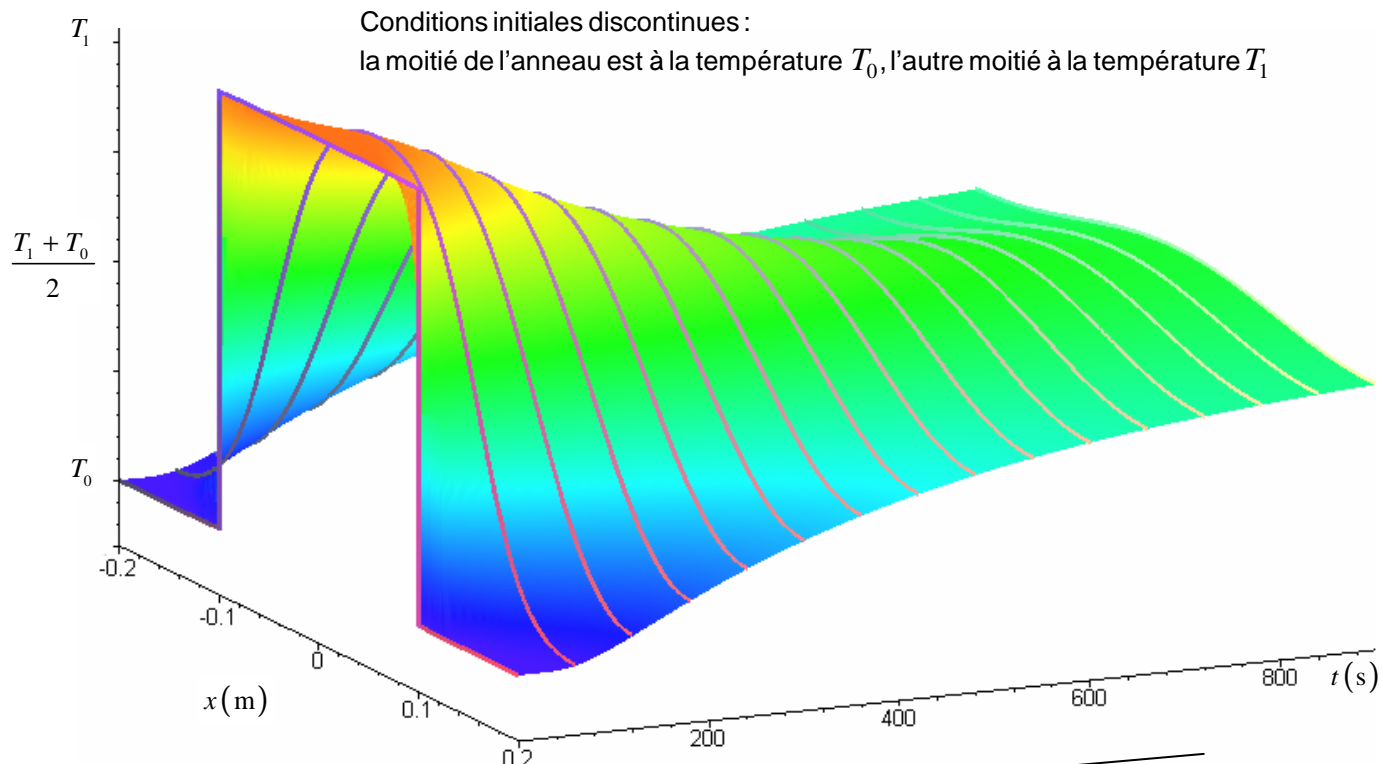


Méthode de résolution par décomposition de Fourier

L’idée de Fourier est très simple. L’équation de la chaleur est une équation différentielle linéaire, et l’on sait résoudre cette équation pour chacune des harmoniques de la fonction périodique décrivant les conditions initiales. La solution de l’équation différentielle pour la fonction périodique quelconque est donc égale à la somme des solutions de l’équation pour chaque harmonique. Dans le cas particulier d’une fonction créneau, nous obtenons :

$$T(x, t) = \frac{T_1 + T_0}{2} + \frac{2}{\pi}(T_1 - T_0) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} e^{-\frac{4\pi^2(2p+1)^2 Dt}{\ell^2}} \cos \frac{2\pi(2p+1)x}{\ell}$$

La figure suivante représente les variations de $T(x, t)$, dans le premier quart d’heure, dans le cas particulier d’un anneau en fer ($D = 1,2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) de longueur $\ell = 0,4 \text{ m}$.



Dans le haut de la page, la sommation de la série de Fourier correspondant aux conditions initiales, est étendue jusqu'au 1000^e terme, tandis que dans le bas de la page ce développement est limité aux trois premiers termes. Calculons, dans le cas de l'anneau d'ancrage, les valeurs des constantes de temps pour les cinq premières harmoniques :

$$\tau_p = \frac{1}{(2p+1)^2} \frac{\ell^2}{4\pi^2 D} \begin{cases} p=0 & (\text{fondamental}) & \tau_0 = 338 \text{ s} \\ p=1 & (\text{harmonique 3}) & \tau_1 = 38 \text{ s} \\ p=2 & (\text{harmonique 5}) & \tau_2 = 14 \text{ s} \\ p=3 & (\text{harmonique 7}) & \tau_3 = 7 \text{ s} \\ p=4 & (\text{harmonique 9}) & \tau_4 = 4 \text{ s} \end{cases}$$

Étant donné que les hautes fréquences spatiales sont beaucoup plus rapidement atténuées, il apparaît clairement que la présence d'harmoniques d'ordre supérieur à 3 ne modifie la solution de diffusion que dans les toutes premières secondes. C'est ce que nous constatons en comparant les deux simulations présentées sur la figure : pour tout ce qui est réellement mesurable, nous ne pouvons pas établir de distinction entre ces deux solutions.

Nous pouvons également constater que, les premières minutes passées, la répartition de température dans l'anneau devient sinusoïdale : ce résultat, vérifiable expérimentalement — et vérifié par Fourier —, est pratiquement indépendant de la distribution initiale de température.

1.5. Interface solide-fluide. Transfert thermique de surface

Notion de « couche limite »

Lorsqu'un fluide de température T_f est mis au contact d'un solide de température différente T_s , il s'établit un gradient de température important dans une couche de fluide de très faible épaisseur que l'on qualifie de couche limite thermique. Cette couche limite est le siège de courants de conduction thermique d'autant plus importants que la différence de température entre le fluide et le solide est importante.

Ce transfert thermique, que l'on qualifie de transfert *conducto-convectif* est d'autant plus efficace que le fluide est dense et de conductivité thermique importante.

L'efficacité du transfert thermique augmente aussi avec la mobilité du fluide. Le fluide peut se mettre en mouvement par le seul fait que sa température n'est plus homogène : au contact d'une paroi froide, le fluide se contracte, devient plus dense et subit plus fortement la gravitation. On parle alors de convection « naturelle ».

Si le mouvement du fluide est provoqué, à l'instar du mouvement d'air produit par un ventilateur, le transfert conducto-convectif est beaucoup plus efficace : on parle alors de convection « forcée ».

Loi phénoménologique de Newton

Dès le XVII^e siècle, Newton proposa un modèle simple pour rendre compte des transferts conducto-convectifs : la densité de courant thermique est proportionnelle à l'écart de température entre le fluide et le solide.

$$j_{\text{th}, s \rightarrow f} = h(T_s - T_f)$$

Le coefficient de transfert h de la loi de Newton se mesure donc en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Sa valeur évolue dans une fourchette très large allant de quelques fractions d'unité dans le cas de la convection naturelle d'un gaz à plusieurs centaines de watt par mètre carré par kelvin dans le cas de la convection forcée d'un métal liquide.

Conductance thermique de conducto-convection

La proportionnalité entre la densité de courant thermique et l'écart de température implique une proportionnalité entre le flux thermique et l'écart de température. Si l'on considère une surface s d'interface solide-liquide, nous pouvons écrire l'expression de la puissance thermique transmise par cette surface dans le cadre d'une modélisation conforme à la loi de Newton :

$$\Phi_{s \rightarrow f} = j_{th} s = h s (T_s - T_f) = G_{th} (T_s - T_f) \quad \text{avec} \quad G_{th} = h s$$

Exemple : considérons le cas d'une vitre de surface $s = 1 \text{ m}^2$ séparant l'air intérieur d'une pièce de l'air extérieur. L'air intérieur, de température $t_{int} = 20^\circ\text{C}$, est quasiment immobile et nous observons un coefficient de transfert de la loi de Newton de petite valeur : $h_{int} = 20 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. L'air extérieur, de température $t_{ext} = 5^\circ\text{C}$, est plus agité, il y a du vent, et nous observons un coefficient de transfert cinq fois plus important : $h_{ext} = 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Le verre a une épaisseur $e = 3 \text{ mm}$ et une conductivité thermique $\lambda = 1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Pour une surface s de vitrage, les trois résistances thermiques sont en série et l'on peut et la résistance du vitrage a pour valeur la somme des deux résistances conducto-convectives et de la résistance de conduction :

$$R_{th} = \frac{1}{h_{ext} s} + \frac{e}{\lambda s} + \frac{1}{h_{int} s}$$

Applications numériques : $R_{th} = 0,01 + 0,0025 + 0,05 = 0,0625 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$. Dans ce cas de figure, ce sont les phénomènes conducto-convectifs qui prédominent. Le flux thermique a pour valeur :

$$\Phi = \frac{t_{int} - t_{ext}}{R_{th}} = \frac{15}{0,0625} = 240 \text{ W}$$

Nous en déduisons :

$$t_{V \text{ ext}} - t_{ext} = \frac{\Phi}{h_{ext} s} = \frac{240}{100} = 2,4^\circ\text{C} \quad \text{soit} \quad t_{V \text{ ext}} = 7,4^\circ\text{C}$$

$$t_{int} - t_{V \text{ int}} = \frac{\Phi}{h_{int} s} = \frac{240}{20} = 12,0^\circ\text{C} \quad \text{soit} \quad t_{V \text{ int}} = 8,0^\circ\text{C}$$

Conclusion : la vitre se thermalise à une température pratiquement uniforme et la température plutôt basse de sa face intérieure fait qu'il s'y produira souvent des phénomènes de condensation.