

Analyse et synthèse de Fourier

L'objectif est de se familiariser avec la représentation spectrale d'un signal périodique. Rien de tel pour cela que de construire soi-même des spectres de Fourier.

Le langage « MAPLE » s'y prête bien puisqu'il permet la définition de lignes brisées définies par une liste de points $ligne \leftarrow [P_1, P_1, \dots, P_n]$, chaque point étant lui-même une liste de deux coordonnées $P_k \leftarrow [x_k, y_k]$. La représentation graphique de cette ligne se fait par la simple instruction :

`> plot(ligne, options);`

Les options sont nombreuses et variées et peuvent être consultées à l'aide de la commande :

`> ?plot(options)`

L'instruction « plot » permet également de tracer des listes de lignes assorties de listes d'options.

Rappel de cours : Expression des coefficients de Fourier

La série de Fourier peut aussi bien s'écrire sous la forme d'un développement en cosinus et sinus, sous la forme :

$$s(t) = \langle s \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sqrt{2} \cos(n\omega t + \varphi_n) = \langle s \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

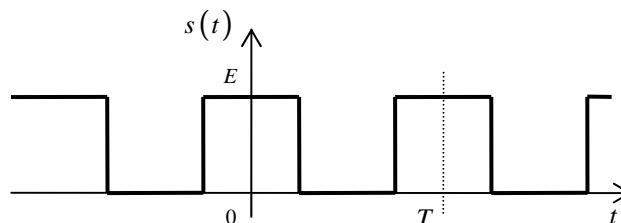
avec, bien sûr, les correspondances $\begin{cases} a_n = +S_n \sqrt{2} \cos \varphi_n \\ b_n = -S_n \sqrt{2} \sin \varphi_n \end{cases}$ d'où l'on déduit : $S_n \sqrt{2} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Les coefficients a_n et b_n sont alors donnés par les intégrales de Fourier :

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} s(t) \cos n\omega t dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{[T]} s(t) \sin n\omega t dt \end{cases}$$

On notera S_0 la valeur absolue de la valeur moyenne du signal, $S_0 = |\langle s \rangle|$, et $\varphi_0 = 0$ si cette valeur moyenne est positive ou nulle, $\varphi_0 = \pi$ si elle est négative.

- 1- Écrire un programme MAPLE qui donne l'expression littérale des coefficients de Fourier $\langle s \rangle$, a_n et b_n de la fonction créneau suivante :



- 2- Représenter les suites S_n et φ_n sous la forme usuelle de « diagrammes bâtons ».
- 3- Calculer et représenter graphiquement le signal de Fourier obtenu par synthèse additive des composantes de Fourier limitée à l'harmonique de rang N : $s_N(t) = \langle s \rangle + \sum_{n=1}^N S_n \sqrt{2} \cos(n\omega t + \varphi_n)$