Crible d'Ératosthène

Principe

Un nombre entier supérieur ou égal à deux est premier si et seulement s'il n'admet pas d'autre diviseur entier que lui-même et le nombre 1.
Afin de constituer la liste des nombres premiers inférieurs à un certain nombre entier N, on se propose de programmer la méthode du crible d'Ératosthène qui consiste à construire un tableau de vérité $estpremier\left[k\right]$, k variant dans l'intervalle $2\cdot\cdot N$.

A priori, tous les nombres sont premiers : $estpremier\left[k\right]=true$

Le nombre 2 est le premier nombre premier, nous pouvons donc donner la valeur *false* à tous les éléments du tableau *estpremier* qui sont multiples de 2.
Le nombre 3 apparaît alors comme étant le deuxième nombre premier, nous pouvons donc donner la valeur *false* à tous les éléments du tableau *estpremier* qui sont multiples de 3, etc. etc. etc.

Exemple

Le tableau *estpremier* des entiers inférieurs à 31 est initialisé à la valeur *true*.

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2=true & 3=true & 4=true & 5=true & 6=true \\
7=true & 8=true & 9=true & 10=true & 11=true & 12=true \\
13=true & 14=true & 15=true & 16=true & 17=true & 18=true \\
19=true & 20=true & 21=true & 22=true & 23=true & 24=true \\
25=true & 26=true & 27=true & 28=true & 29=true & 30=true
\end{array}$$

2 étant premier, on déclare non premiers les multiples de 2 :

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2=true & 3=true & 4=false & 5=true & 6=false \\
7=true & 8=false & 9=true & 10=false & 11=true & 12=false \\
13=true & 14=false & 15=true & 16=false & 17=true & 18=false \\
19=true & 20=false & 21=true & 22=false & 23=true & 24=false \\
25=true & 26=false & 27=true & 28=false & 29=true & 30=false
\end{array}$$

3 étant premier, on déclare non premiers les multiples de 3 :

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2=true & 3=true & 4=false & 5=true & 6=false \\
7=true & 8=false & 9=false & 10=false & 11=true & 12=false \\
13=true & 14=false & 15=false & 16=false & 17=true & 18=false \\
19=true & 20=false & 21=false & 22=false & 23=true & 24=false \\
25=true & 26=false & 27=false & 28=false & 29=true & 30=false
\end{array}$$

A ce stade, nous savons déjà que 4 n'est pas premier, ainsi que tous les multiples de 4.
Il nous reste à noter comme non-premiers les multiples de 5 :

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2=true & 3=true & 4=false & 5=true & 6=false \\
7=true & 8=false & 9=false & 10=false & 11=true & 12=false \\
13=true & 14=false & 15=false & 16=false & 17=true & 18=false \\
19=true & 20=false & 21=false & 22=false & 23=true & 24=false \\
25=false & 26=false & 27=false & 28=false & 29=true & 30=false
\end{array}$$

Le tableau de vérité est alors correct. En effet, il est inutile de s'intéresser à un nombre tel que 6 dont le carré 36 est supérieur à 30 : si un nombre n'est pas premier, l'un au moins de ses diviseurs est inférieur ou égal à sa racine carrée.
Nous en déduisons la liste des nombres premiers inférieurs à 31 : $\left[2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29\right]$

Algorithme

Écrire un algorithme qui réalise le crible d'Ératosthène et traduire cet algorithme en langage MAPLE.

On s'attachera en particulier à ne pas réaliser de multiplication (et encore moins de division). En effet, ces opérations sont très coûteuses en temps machine.

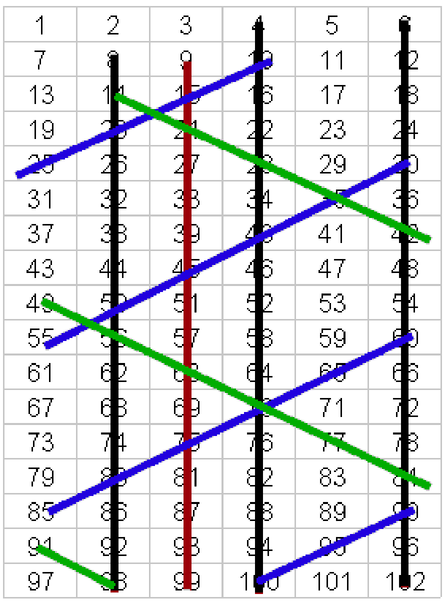
Enfin, on veillera à ne pas réaliser de tests inutiles. Le programme devra être optimisé.

Complément

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des nombres premier inférieurs à *n*. Pour les « grands nombres », le cardinal de $\mathcal{P}_n$ est très bien approché par $f(n) = \dfrac{n}{\ln n}$ et encore mieux par $g(n) = \dfrac{n}{\ln n - 1}$.

Étudier expérimentalement, sans démonstration, le comportement des suites $\dfrac{\mathrm{Card}(\mathcal{P}_n)}{f(n)}$ et $\dfrac{\mathrm{Card}(\mathcal{P}_n)}{g(n)}$ quand $n \to \infty$. Conclusion ?

Ératosthène (vers 276-vers 194 avant J.-C.), mathématicien, astronome, géographe et poète grec, est connu pour avoir calculé avec une précision remarquable la circonférence de la Terre en ayant déterminé de manière ingénieuse la différence de latitude entre les villes de Syène et d'Alexandrie.



1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102

Dans ses œuvres mathématiques figure la méthode du crible permettant de mettre en évidence dans un tableau de nombres l'ensemble des nombres premiers. Ératosthène présente sa méthode sous la forme d'un tableau dans lequel sont rayées des séries de nombres alignés.