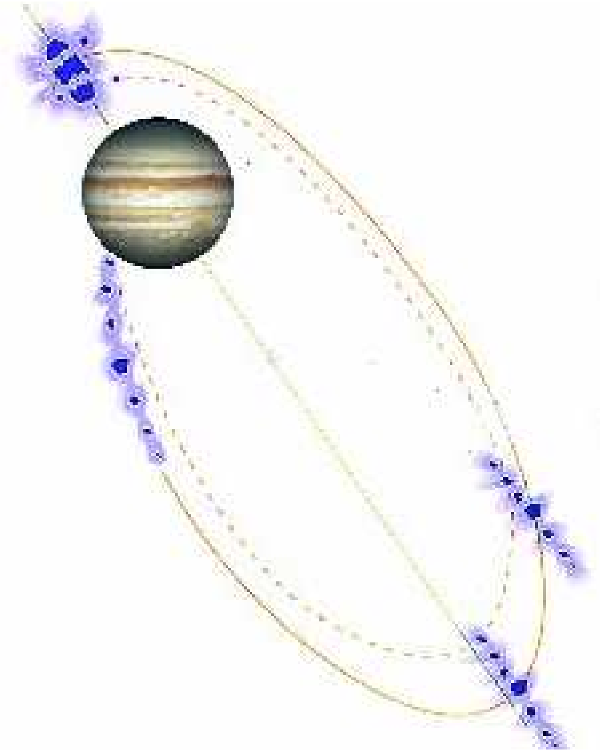
Méthode d'Euler



La méthode d'Euler est une méthode d'intégration numérique d'équations différentielles du premier ordre de la forme $\frac{dy}{dt} = f(y,t)$. C'est une méthode itérative. La valeur de y à l'instant $t+\Delta t$ se déduisant de la valeur de y à l'instant t par l'approximation linéaire :

$$y(t+\Delta t) \approx y(t) + \frac{dy}{dt}\Delta t = y(t) + f(y,t)\Delta t$$

En choisissant un *pas de discrétisation* Δt suffisamment petit, nous obtenons une suite de valeurs $[y_i,\ t_i]$ qui peuvent être une excellente approximation de la fonction $y(t)$, avec :

$$\begin{cases} t_i = t_0 + i\,\Delta t \\ y_i = y_{i-1} + f(y_i, t_i)\,\Delta t \end{cases}$$

Il faut bien sûr connaître les valeurs $[y_0, t_0]$ pour initialiser la récurrence.

Dans un référentiel galiléen, la loi de force définit l'accélération du point matériel : $\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$

En appliquant la méthode d'Euler une première fois, il est possible d'obtenir la loi de vitesse. En intégrant ensuite cette loi de vitesse selon la même méthode, nous obtenons la loi horaire du mouvement.

Dans le cas d'un mouvement plan, on représentera la trajectoire à l'aide du logiciel MAPLE en construisant par une boucle d'itération la séquence des points successifs $[x(t_i), y(t_i)]$ calculés selon la méthode d'Euler. Si l'on appelle *trajectoire* cette séquence de points, la trajectoire plane sera obtenue par l'instruction simple : `plot([trajectoire]);`

1. **Mouvement d'une planète**. On choisit de travailler en coordonnées réduites : d'une part le demi grand-axe de la trajectoire de la planète et la masse du Soleil sont choisis pour unités de longueur et de masse et d'autre part la constante de gravitation universelle a pour mesure 1. Déterminer les conditions initiales conduisant à une orbite est circulaire Représenter la trajectoire d'une telle planète gravitant autour du Soleil dans le cas où l'orbite est circulaire. Faire varier légèrement les conditions de vitesse initiale, en module et en direction : qu'observe-t-on ?
2. **Mouvement d'une comète**. Considérons une comète en approche du Soleil selon Ox (choisir les conditions initiales $x = 2$ et $y = 0,5$ par exemple). Choisir la vitesse initiale de la comète de telle sorte que son énergie soit nulle. Représenter la trajectoire d'une telle comète. Faire varier légèrement en module les conditions de vitesse initiale : qu'observe-t-on ?
3. **Effet de « fronde »**. La même comète d'énergie nulle croise la planète précédente sur son orbite circulaire. Les rapports de masses sont tels que la comète ne perturbe pas le mouvement de la planète. La planète est mille fois moins massive que le Soleil. En choisissant la phase de la planète sur son orbite circulaire, organiser le « rendez-vous » entre la planète et la comète telle sorte que cette dernière subisse la perturbation planétaire et que son orbite solaire soit sensiblement modifiée. Une « capture » de la comète est-elle possible ?