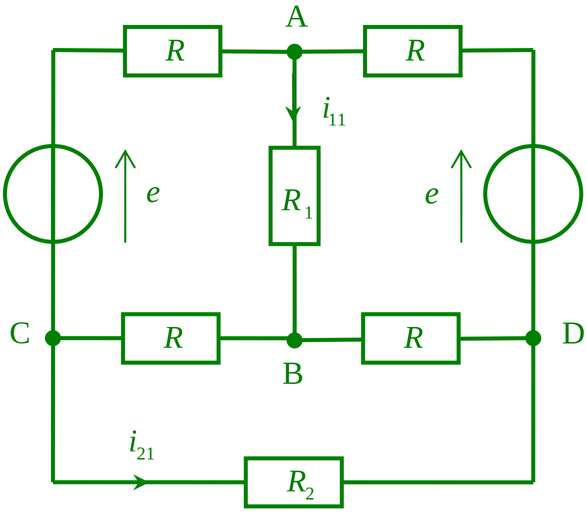
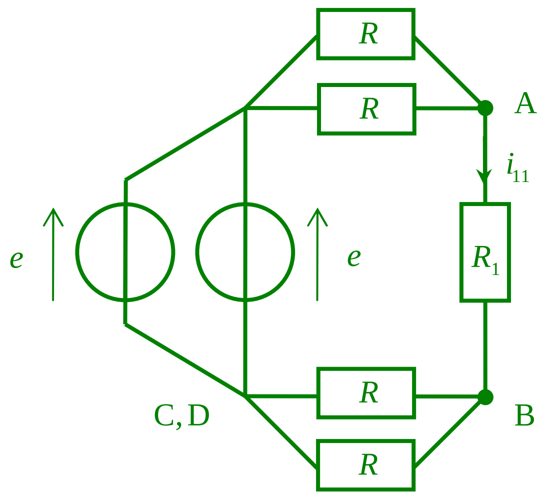
TD de physique : principe de Curie - Corrigé

1. Réseau symétrique $\{e, e\}$

Considérons le réseau suivant pour lequel la branche AB est un axe de symétrie. Si l'on souhaite déterminer les courants i_{11} et i_{21} dans les résistances R_1 et R_2, il est inutile d'écrire les lois de Kirchhoff pour un réseau à trois mailles.

En effet, nous ne changeons pas les courants en reliant par un fil tous les nœuds symétriques, ce qui revient à replier le circuit sur lui-même selon l'axe de symétrie. On obtient alors un schéma sur lequel les résistances R sont en parallèle et équivalent à une résistance $R/2$ tandis que les deux générateurs idéaux en parallèle sont équivalents à un seul générateur de même force électromotrice e. Les nœuds C et D étant au même potentiel, il ne passe aucun courant dans la résistance R_3.

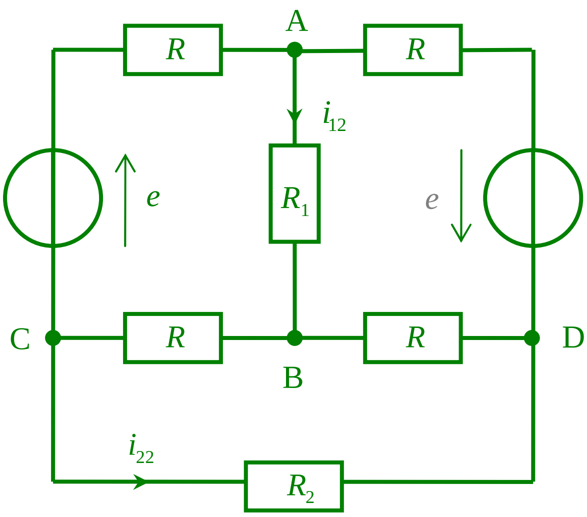


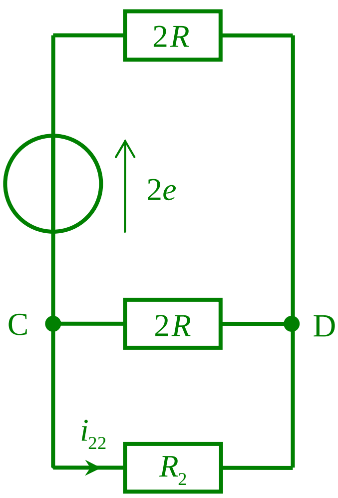


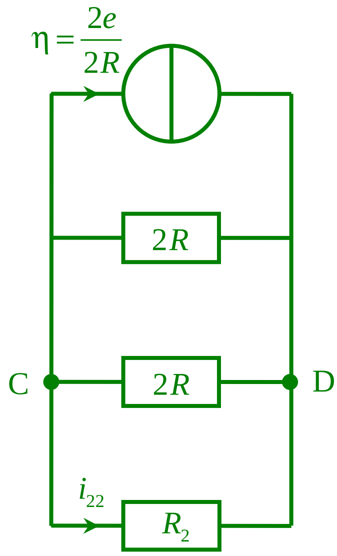
On en déduit, sur le dernier schéma : $i_{11} = \dfrac{e}{R + R_1}$ et $i_{21} = 0$

2. Réseau antisymétrique $\{e, -e\}$

Considérons le réseau suivant pour lequel la branche AB est un axe d'antisymétrie. On souhaite déterminer les courants i_{12} et i_{22} dans les résistances R_1 et R_2.







La branche AB, située dans le plan d'antisymétrie, n'est parcourue par aucun courant. On peut donc supprimer la résistance R_1 sans modifier la situation électrique du réseau. Les deux mailles supérieures n'en font plus qu'une et l'on peut y associer deux générateurs linéaires en série.

Il reste alors à choisir plutôt la représentation de Norton du générateur résultant et nous obtenons le dernier schéma, sur lequel le courant i_{22} se calcule par division de courant.

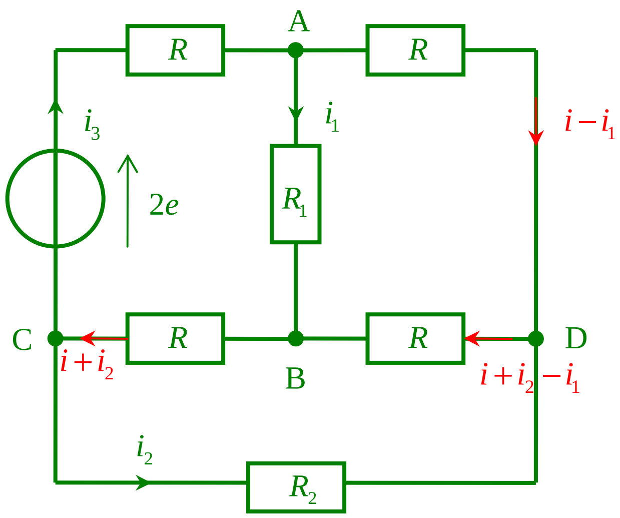
On en déduit : $$i_{12} = 0 \quad \text{et} \quad i_{22} = -\frac{e}{R}\frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}+\frac{1}{R_2}} = -\frac{e}{R+R_2}$$

3.1. Théorème de superposition

Nous résolvons immédiatement le problème initialement posé, par application du théorème de superposition, en remarquant que ce réseau est la superposition du réseau symétrique et du réseau antisymétrique : $\{2e,0\} = \{e,e\} + \{e,-e\}$

$$i_1 = i_{11} + i_{12} = i_{11} = \frac{e}{R+R_1} \quad \text{et} \quad i_2 = i_{21} + i_{22} = i_{22} = -\frac{e}{R+R_2}$$

3.2. Application des lois de Kirchhoff



Les courants dans les branches AD, DB et BC s'expriment en fonction de i_1, i_2 et i_3 en appliquant la loi des nœuds. Les trois équations de mailles s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad Ri + R_1 i_1 + R(i_3 + i_2) = 2e & & (1) \quad R_1 i_1 + R i_2 + 2R i_3 = 2e \\
&(2) \quad R(i_1 - i_3) + R_1 i_1 + R(i_1 - i_3 - i_2) = 0 & \text{soit} \quad & (2) \quad (2R + R_1) i_1 - R i_2 - 2R i_3 = 0 \\
&(3) \quad R(i_3 + i_2) - R(i_1 - i_3 - i_2) + R_2 i_2 = 0 & & (3) \quad -R i_1 + (2R + R_2) i_2 + 2R i_3 = 0
\end{aligned}$$

Quelques combinaisons linéaires simples d'équations permettent d'obtenir un système de deux équations à deux inconnues i_1 et i_2 dont la résolution est immédiate.

$$\begin{aligned}
&(1)+(2) \quad 2(R+R_1) i_1 = 2e \\
&(2)+(3) \quad (R+R_1) i_1 + (R+R_2) i_2 = 0
\end{aligned} \quad \text{soit} \quad i_1 = \frac{e}{R+R_1} \quad \text{et} \quad i_2 = -\frac{e}{R+R_2}$$

Chacun choisira son point de vue. Le théorème de superposition donne une solution dont l'interprétation physique est assurément meilleure.