TD de physique **: Régimes transitoires couplés-corrigé**

1. Établir le système d'équations différentielles auxquelles obéissent les tensions $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$.

Les équations traduisant la loi des mailles nous donnent ces équations différentielles pourvu que l'on traduise correctement les caractéristiques des composants :

$$\begin{cases} u_{C1}(t)+RC\dfrac{du_{C1}(t)}{dt}+LC\dfrac{d^2u_{C1}(t)}{dt^2}+MC\dfrac{d^2u_{C2}(t)}{dt^2}=e \\ u_{C2}(t)+RC\dfrac{du_{C2}(t)}{dt}+LC\dfrac{d^2u_{C2}(t)}{dt^2}+MC\dfrac{d^2u_{C1}(t)}{dt^2}=0 \end{cases}$$

2. Établir le système d'équations différentielles auxquelles obéissent les tensions $v_+(t)=u_{C1}(t)+u_{C2}(t)$ et $v_-(t)=u_{C1}(t)-u_{C2}(t)$.

Nous obtenons les équations différentielles découplées auxquelles satisfont les fonctions $v_+(t)$ et $v_-(t)$ en faisant la somme et la différence des équations précédentes :

$$\frac{d^2v_+(t)}{dt^2}+\frac{R}{L+M}\frac{dv_+(t)}{dt}+\frac{v_+(t)}{(L+M)C}=e \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2v_-(t)}{dt^2}+\frac{R}{L-M}\frac{dv_-(t)}{dt}+\frac{v_-(t)}{(L-M)C}=e$$

3. Déterminer les conditions initiales pour les fonctions $v_+(t)$, $v_-(t)$ et leurs dérivées premières.

Les conditions aux limites imposent des tensions initiales nulles aux bornes des condensateurs, mais aussi des courant initiaux nuls. Cela fait que les fonctions $v_+(t)$ et $v_-(t)$ doivent satisfaire aux conditions : $v_+(0)=v_-(0)=0$ et $\dfrac{dv_+}{dt}(0)=\dfrac{dv_-}{dt}(0)=0$

4. Déterminer les expressions des tensions $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$ dans le cas idéal d'un amortissement nul $(R=0)$. On posera $\omega_+=\dfrac{1}{\sqrt{(L+M)C}}$ et $\omega_-=\dfrac{1}{\sqrt{(L-M)C}}$.

les équations du système non amorti s'écrivent alors sous la forme canonique de deux équations harmoniques :

$$\frac{d^2v_+(t)}{dt^2}+\omega_+^2\,v_+(t)=e \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2v_-(t)}{dt^2}+\omega_-^2\,v_-(t)=e$$

Les solutions sinusoïdales correspondant aux conditions initiales sont les suivantes :

$$v_+(t)=e(1-\cos\omega_+t) \qquad \text{et} \qquad v_-(t)=e(1-\cos\omega_-t)$$

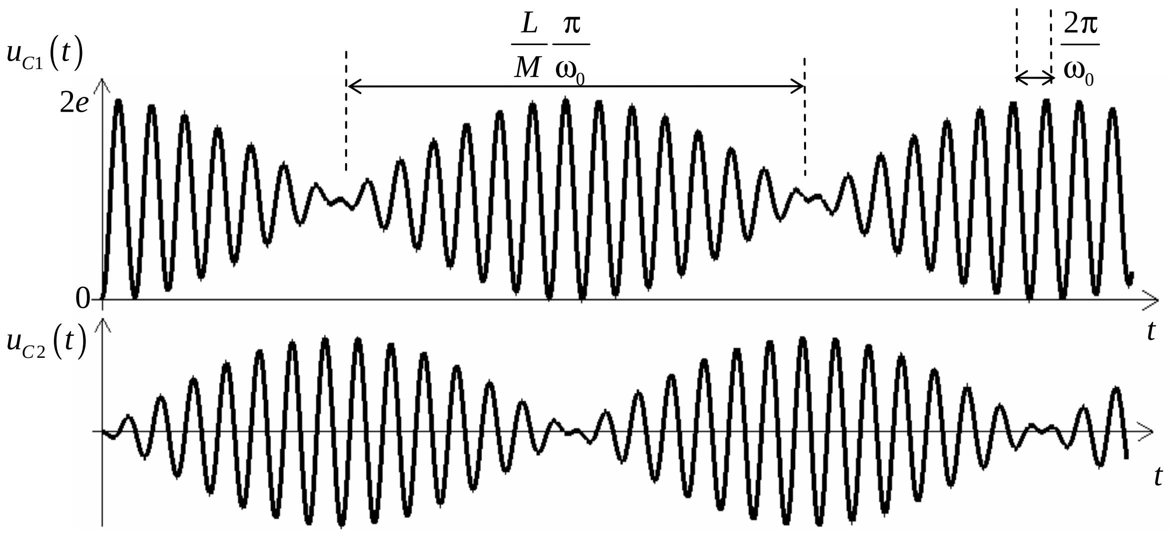
Nous en déduisons les expressions de $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$:

$$\begin{cases} u_{C1}(t)=\dfrac{v_+(t)+v_-(t)}{2}=e\left[1-\dfrac{\cos\omega_+t+\cos\omega_-t}{2}\right]=e\left[1-\cos\left(\dfrac{\omega_+-\omega_-}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\omega_++\omega_-}{2}t\right)\right] \\ u_{C2}(t)=\dfrac{v_+(t)-v_-(t)}{2}=e\dfrac{\cos\omega_-t-\cos\omega_+t}{2}=e\sin\left(\dfrac{\omega_+-\omega_-}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_++\omega_-}{2}t\right) \end{cases}$$

5. Tracer l'allure des fonctions $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$ dans le cas particulier d'un couplage inductif faible, c'est-à-dire lorsque $M \ll L$. On posera $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Dans le cas d'un couplage inductif faible, lorsque $M \ll L$, en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, nous avons dans une approximation au premier ordre en $\dfrac{M}{L}$:

$$\begin{cases} u_{C1}(t) \simeq e\left[1-\cos\left(\dfrac{M}{L}\omega_0 t\right)\cos\omega_0 t\right] \\ u_{C2}(t) \simeq e\sin\left(\dfrac{M}{L}\omega_0 t\right)\sin\omega_0 t \end{cases}$$



Un produit de fonctions périodiques n'est pas *a priori* périodique, mais dans ces conditions où la période $\dfrac{2\pi}{\omega_0}\dfrac{L}{M}$ est très grande par rapport à la période $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$, il apparaît un phénomène de *battements* de « période » $\dfrac{\pi}{\omega_0}\dfrac{L}{M}$.

Note : le programme MAPLE suivant trace les courbes représentant les fonctions $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$ dans le cas particulier où $\dfrac{L}{M} = 0,07$.

```
> eq1:=L*diff(uC1(t),t,t)+M*diff(uC2(t),t,t)+uC1(t)=E;
  eq2:=L*diff(uC2(t),t,t)+M*diff(uC1(t),t,t)+uC2(t)=0;
  init:=D(uC1)(0)=0,D(uC2)(0),uC1(0)=0,uC2(0)=0;
  sol:=dsolve({eq1,eq2,init},{uC1(t),uC2(t)});
  assign(sol):
  R:=0:L:=1:E:=1:M:=k*L:k:=0.07:C:=1;
  plot(uC1(t),t=0..200);
  plot(uC2(t),t=0..200);
```

6. Que peut-on dire de l'énergie électromagnétique dans une telle évolution ? Comment évolue le phénomène dans le cas plus réaliste où les résistances R ne sont pas nulles ?

   L'énergie électromagnétique, qui oscille initialement dans le circuit 1 entre le condensateur et la bobine, est progressivement transmise au circuit 2. Ce transfert s'effectue dans un temps caractéristique qui est d'autant plus long que l'inductance mutuelle M est faible.

   Ce transfert d'énergie se fait idéalement sans perte dans le cas où l'on ne prend pas en compte l'effet Joule. Dans un cas réel, l'énergie électromagnétique fera toujours des allers-retours entre le circuit 1 et le circuit 2, mais les pertes par effet Joule se traduiront par des amortissements. Les tensions $u_{C1}(t)$ et $u_{C2}(t)$ seront encadrées par des enveloppes exponentiellement décroissantes