Mécanique : énergie d'accrétion gravitationnelle - Corrigé

1. Établir les correspondances entre grandeurs électriques et grandeurs mécaniques en partant de l'analogie entre les deux lois de force : la loi de Coulomb pour l'électrostatique et la loi de gravitation universelle pour la mécanique.

Loi de Coulomb	$\overrightarrow{F_{12}}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{e_{12}}$	$\leftrightarrow$	$\overrightarrow{F_{12}}=-G\dfrac{m_1m_2}{r_{12}^2}\overrightarrow{e_{12}}$	Loi de Newton
charge	q	$\leftrightarrow$	m	masse
Constante électrostatique	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$\leftrightarrow$	$-G$	Opposé de la constante de gravitation
Permittivité du vide	ε_0	$\leftrightarrow$	$-\dfrac{1}{4\pi G}$	
Champ électrique	$\vec{F}=q\vec{E}$	$\leftrightarrow$	$\vec{F}=m\vec{g}$	Champ de gravitation
Potentiel électrostatique	$\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,V$	$\leftrightarrow$	$\vec{g}=-\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$	Potentiel gravitationnel
	$V(\mathrm{M})=V(\mathrm{M}_0)-\int_{\overset{\frown}{\mathrm{M}_0M}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{d\ell}$	$\leftrightarrow$	$\varphi(\mathrm{M})=\varphi(\mathrm{M}_0)-\int_{\overset{\frown}{\mathrm{M}_0M}}\vec{g}\cdot\overrightarrow{d\ell}$	
Théorème de Gauss	$\phi_{\vec{E}}=\oint\!\!\oint_S\vec{E}\cdot\overrightarrow{n_{\text{ext}}}\,dS=\dfrac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	$\leftrightarrow$	$\phi_{\vec{g}}=\oint\!\!\oint_S\vec{g}\cdot\overrightarrow{n_{\text{ext}}}\,dS=-4\pi Gm_{\text{int}}$	Équivalent gravitationnel

2. Par application du théorème de Gauss pour la gravitation, déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}$ à l'intérieur, puis à l'extérieur du planétoïde.

La symétrie sphérique isotrope de centre O implique que, pour tout point M, l'axe $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ étant un axe de symétrie de la distribution de masse, le champ gravitationnel $\vec{g}$ est radial. De plus, l'isotropie (i.e. le fait que, vu du centre O, toutes les directions de l'espace sont équivalentes) implique que la composante radiale ne dépend que de la distance OM, notée r : $\vec{g}=g_r(r)\overrightarrow{e_r}$.

Du fait de cette symétrie, le choix d'une surface de Gauss $\mathcal{S}_{\mathrm{G}}$ sphérique de centre O à laquelle appartient le point M s'impose. Le flux sortant du champ gravitationnel s'écrivant alors :

$$\phi_{\vec{g}}=\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}_{\mathrm{G}}}\vec{g}\cdot\overrightarrow{n_{\text{ext}}}\,dS=\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}_{\mathrm{G}}}g_r(r)\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{n_{\text{ext}}}\,dS=\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}_{\mathrm{G}}}g_r(r)\,dS=g_r(r)\oint\!\!\oint_{\mathcal{S}_{\mathrm{G}}}dS=4\pi r^2g_r(r)$$

L'expression de la masse intérieure à la surface de Gauss diffère selon que le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur du planétoïde.

Pour un point intérieur au planétoïde, celui-ci étant supposé homogène, la masse intérieure m_{int} n'est qu'une partie de la masse totale M proportionnelle au volume délimité par la surface $\mathcal{S}_{\mathrm{G}}$ et le théorème de Gauss s'écrit :

$$\phi_{\vec{g}}=4\pi r^2g_r(r)=-4\pi Gm_{\text{int}}=-4\pi GM\frac{r^3}{R^3}$$

Nous en déduisons l'expression du champ gravitationnel pour un point intérieur au planétoïde :

$$g_r(r) = -GM\frac{r}{R^3} \qquad \text{soit} \qquad \vec{g} = -\frac{GMr}{R^3}\vec{e}_r \qquad \text{pour} \qquad r < R$$

Pour un point extérieur au planétoïde, la masse intérieure m_{int} s'identifie à la masse totale M de celui-ci et le théorème de Gauss s'écrit :

$$\phi_{\vec{g}} = 4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G m_{\text{int}} = -4\pi GM$$

Nous en déduisons l'expression du champ gravitationnel pour un point extérieur au planétoïde, identique au champ gravitationnel que créerait une masse ponctuelle M placée au centre O :

$$g_r(r) = -GM\frac{1}{r^2} \qquad \text{soit} \qquad \vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{pour} \qquad r > R$$

3. En déduire l'expression du potentiel gravitationnel φ à l'intérieur, puis à l'extérieur du planétoïde.

Nous choisissons de considérer que le potentiel est nul à l'infini. Avec ce choix, le potentiel à l'extérieur du planétoïde a pour expression :

$$\varphi(r) = -\int_\infty^r g_r(r)\,dr = \int_\infty^r GM\frac{1}{r^2}dr = \left[-GM\frac{1}{r}\right]_\infty^r = -\frac{GM}{r} \qquad \text{pour} \qquad r > R$$

Le potentiel gravitationnel à la surface du planétoïde a pour valeur particulière $\varphi(R) = -\dfrac{GM}{R}$

Et, enfin, le potentiel à l'intérieur du planétoïde s'exprime par l'intégrale suivante assurant la continuité du potentiel :

$$\varphi(r) = \varphi(R) - \int_R^r g_r(r)\,dr = -\frac{GM}{R} + \int_R^r \frac{GMr}{R^3}dr = -\frac{GM}{R} + \left[\frac{GMr^2}{2R^3}\right]_R^r = -\frac{GM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{ pour } r < R$$

4. Dans le cas d'une répartition continue de charges de densité volumique $\rho(\mathrm{M})$ à l'intérieur d'un volume τ, l'énergie potentielle du système de charges s'écrit :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho(\mathrm{M})V(\mathrm{M})\,d\tau$$

Déterminer l'expression de l'énergie potentielle d'un planétoïde de masse M, idéalement sphérique et homogène.

Par analogie, l'expression de l'énergie potentielle d'une répartition continue de masse de densité volumique $\mu(\mathrm{M})$ a pour expression : $\mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}\iiint_\tau \mu(\mathrm{M})\varphi(\mathrm{M})\,d\tau$.

Du fait de la symétrie sphérique, nous prenons pour élément de volume $d\tau$ le volume d'une couche sphérique élémentaire correspondant au volume compris entre les sphères de rayon r et $r+dr$, soit $d\tau = 4\pi r^2 dr$.

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\int_0^R \mu\varphi(r)\,d\tau = -\frac{1}{2}\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^R \frac{GM}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)4\pi r^2 dr = -\frac{3GM^2}{4R}\int_0^1 \left(3 - x^2\right)x^2 dx$$

Le nombre $\int_0^1 \left(3 - x^2\right)x^2 dx$ ayant pour valeur $\dfrac{4}{5}$, nous en déduisons : $\mathcal{E}_p = -\dfrac{3GM^2}{5R}$

Nous remarquons que cette énergie est négative, il s'agit d'une énergie de liaison, traduisant la cohésion du planétoïde.

5. En électromagnétisme, nous considérerons que cette énergie potentielle est associée à l'existence du champ électrique dans tout l'espace, la densité volumique d'énergie ayant pour expression $u=\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2$. Quelle est l'expression équivalente en gravitation ?

   Déterminer les énergies $\mathcal{E}_{p\ \text{int}}$ et $\mathcal{E}_{p\ \text{ext}}$ associées au champ gravitationnel. Que vaut $\mathcal{E}_{p\ \text{int}}+\mathcal{E}_{p\ \text{ext}}$?

   À la permittivité du vide ε_0 correspond en gravitation la grandeur $-\frac{1}{4\pi G}$. La densité volumique d'énergie associée au champ gravitationnel s'écrit donc $u=-\frac{1}{8\pi G}\vec{g}^2$

   Nous obtenons l'expression de $\mathcal{E}_{p\ \text{int}}$ en intégrant u sur la totalité du volume intérieur :

$$\mathcal{E}_{p\ \text{int}}=\iiint_{\substack{\text{Volume}\\ \text{intérieur}}}u\ d\tau=-\frac{1}{8\pi G}\int_0^R\left(\frac{GMr}{R^3}\right)^2 4\pi r^2dr=-\frac{GM^2}{2R}\int_0^1 x^4dx=-\frac{GM^2}{10R}$$

   De la même façon, ; nous obtenons $\mathcal{E}_{p\ \text{ext}}$ en intégrant u sur l'espace extérieur :

$$\mathcal{E}_{p\ \text{ext}}=\iiint_{\substack{\text{Volume}\\ \text{extérieur}}}u\ d\tau=-\frac{1}{8\pi G}\int_R^\infty\left(\frac{GM}{r^2}\right)^2 4\pi r^2dr=-\frac{GM^2}{2R}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=-\frac{GM^2}{2R}$$

   L'énergie totale du champ a donc pour valeur $\mathcal{E}_p=\mathcal{E}_{p\ \text{int}}+\mathcal{E}_{p\ \text{ext}}=-\frac{GM^2}{10R}-\frac{GM^2}{2R}=-\frac{3GM^2}{5R}$

   Nous trouvons bien sûr la même expression qu'à la question 4. L'interprétation est différente, mais il s'agit de la même énergie.

6. Par intégration, la masse du planétoïde variant de 0 à M par dépôt de couches homogènes successives, il nous est possible de déterminer l'expression de l'énergie gravitationnelle du planétoïde formé par accrétion. Que remarque-t-on ?

   Une masse dm étant apportée à la surface du planétoïde de masse $m=M\frac{r^3}{R^3}$, l'énergie de ce dernier s'accroît (algébriquement) de la quantité $d\mathcal{E}_p=\varphi(r)\,dm=-\frac{Gm}{r}dm$.

   Soit : $d\mathcal{E}_p=-\frac{GM\frac{r^3}{R^3}}{r}dm=-\frac{GMr^2}{R^3}\mu\,d\tau=-\frac{GM^2r^2}{\frac{4}{3}\pi R^3R^3}4\pi r^2dr=-\frac{3GM^2}{R^6}r^4dr$

   Nous en déduisons : $\mathcal{E}_p=-\frac{3GM^2}{R}\int_0^1 x^4dx=-\frac{3GM^2}{5R}$

   L'énergie d'accrétion s'identifie à l'énergie du champ gravitationnel aussi bien qu'à l'énergie potentielle du système de masses.