Mécanique : énergie d'accrétion gravitationnelle

Nous considérons un planétoïde de masse M, idéalement sphérique de rayon R et homogène, et nous nous proposons d'exprimer l'énergie d'accrétion gravitationnelle d'un tel astre. Nous procèderons par analogie avec les lois de l'électrostatique et nous allons considérer trois façons différentes d'évaluer cette énergie que nous définissons comme l'opposé de l'énergie qui serait nécessaire pour disperser la matière dans l'univers de telle sorte qu'il n'y ait plus aucune interaction gravitationnelle entre les particules de matière.

1. Établir les correspondances entre grandeurs électriques et grandeurs mécaniques en partant de l'analogie entre les deux lois de force : la loi de Coulomb pour l'électrostatique et la loi de gravitation universelle pour la mécanique. En particulier, on s'attachera à définir un *champ gravitationnel* que l'on notera $\vec{g}$ ainsi qu'un *potentiel gravitationnel* que l'on notera φ et l'on énoncera l'équivalent du théorème de Gauss pour la gravitation.
2. Par application du théorème de Gauss pour la gravitation, déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}$ à l'intérieur, puis à l'extérieur du planétoïde.
3. En déduire l'expression du potentiel gravitationnel φ à l'intérieur, puis à l'extérieur du planétoïde.
4. Nous connaissons l'expression de l'énergie potentielle d'un système de n charges ponctuelles $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$, $V(\mathrm{M}_i)$ étant le potentiel électrostatique créé par les $n-1$ autres charges au point M_i où se trouve la charge q_i :

   $$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i(\mathrm{M}_i)$$

   Dans le cas d'une répartition continue de charges de densité volumique $\rho(\mathrm{M})$ à l'intérieur d'un volume τ, cette expression devient :

   $$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\iiint_\tau \rho(\mathrm{M})V(\mathrm{M})\,d\tau$$

   Déterminer l'expression de l'énergie potentielle d'un planétoïde de masse M, idéalement sphérique et homogène.
5. En électromagnétisme, nous considérerons que cette énergie potentielle est associée à l'existence du champ électrique dans tout l'espace, la densité volumique d'énergie ayant pour expression $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2$. Quelle est l'expression équivalente en gravitation ?

   Déterminer les énergies $\mathcal{E}_{p\ \mathrm{int}}$ et $\mathcal{E}_{p\ \mathrm{ext}}$ associées au champ gravitationnel. Que vaut $\mathcal{E}_{p\ \mathrm{int}} + \mathcal{E}_{p\ \mathrm{ext}}$?
6. Voici une troisième façon d'évaluer l'énergie de cohésion gravitationnelle du planétoïde : nous considérons le planétoïde sphérique de rayon r et de masse volumique μ et nous apportons à sa surface une masse supplémentaire dm, de même masse volumique μ. Le rayon du planétoïde varie alors d'une valeur élémentaire dr et son énergie potentielle gravitationnelle d'une valeur $d\mathcal{E}_p$ que l'on déterminera.

   Par intégration, la masse du planétoïde variant de 0 à M par dépôt de couches homogènes successives, il nous est possible de déterminer l'expression de l'énergie gravitationnelle du planétoïde formé par accrétion. Que remarque-t-on ?