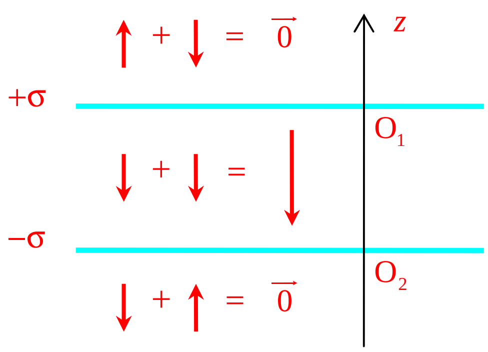
Électrostatique : étude d'un condensateur plan « troué » - corrigé

1. Rappeler l'expression du champ électrique $\vec{E}$ et du potentiel électrostatique V créé dans tout l'espace par une distribution plane idéalement infinie et homogène de densité surfacique σ.
   Tout axe orthogonal au plan chargé est un axe de symétrie de la distribution de charge. Pour un point M quelconque de l'espace n'appartenant pas au plan chargé, H étant le projeté orthogonal de M sur le plan, la droite MH est axe de symétrie ce qui implique que le champ est porté par cet axe.
   Choisissons un repère orthonormé cartésien (O, x, y, z) d'axe Oz orthogonal au plan chargé. La distribution de charge étant invariante par translation quelconque parallèle au plan (x, y), le champ est de la forme $\vec{E} = E_z(z)\vec{e}_z$.
   De plus, le plan (x, y) étant un plan de symétrie, la fonction $E_z(z)$ est nécessairement impaire.
   Par application du théorème de Gauss sur une surface fermée en forme de « boîte cylindrique » disposée symétriquement de part et d'autre de la surface chargée, nous démontrons l'expression du champ électrique (*cf*. Cours d'électrostatique, chapitre 1 : champ électrique) :
$$\begin{cases} \text{pour } z>0 & \vec{E}(z) = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ \text{pour } z=0 & \vec{E}(0) = \vec{0} \\ \text{pour } z<0 & \vec{E}(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z \end{cases}$$
   Il est impossible, pour ce problème « d'école » considérant l'existence de charges à l'infini, de faire le choix d'un potentiel nul à l'infini. En choisissant le potentiel nul en $z=0$, nous obtenons :
$$\begin{cases} V(z) = -\displaystyle\int_0^z E_z(z)\,dz = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z & \text{pour } z>0 \\ V(z) = -\displaystyle\int_0^z E_z(z)\,dz = +\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z & \text{pour } z<0 \end{cases}$$

2. On considère deux plans parallèles uniformément chargés, l'un à la cote $z=+a$ chargé d'une densité surfacique uniforme $+\sigma$, l'autre à la cote $z=-a$ de charge opposée $-\sigma$.
   En appliquant le théorème de superposition, déterminer le champ électrique $\vec{E}$ et le potentiel électrostatique V créé dans tout l'espace par une telle distribution de charge.
   Le théorème de superposition stipule dans le cas présent que le champ créé par les deux plans chargés est égal à la somme des champ créé par chacun des deux plans chargés en l'absence de l'autre.
   Pour $z>+a$ et pour $z<-a$, le champ résultant est donc nul.
   Par contre, pour $-a<z<+a$, le champ résultant est uniforme, dirigé selon Oz et a pour valeur
   $\vec{E}(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z$.

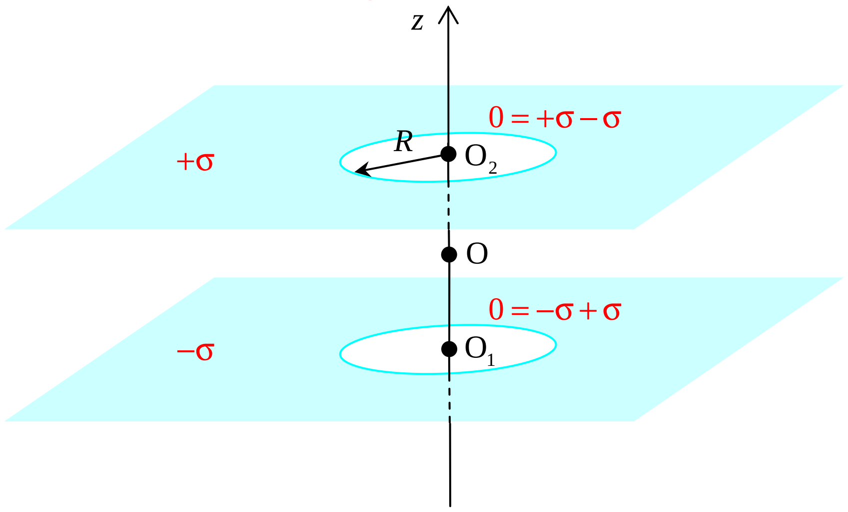


   Nous en déduisons l'expression du potentiel électrostatique, l'origine des potentiels étant choisie dans le plan médian :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } z \geq +a & \vec{E} = \vec{0} \\ \text{pour } -a \leq z \leq +a & \vec{E} = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z \\ \text{pour } z \leq -a & \vec{E} = \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \text{pour } z \geq +a & V(z) = +\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}a \\ \text{pour } -a \leq z \leq +a & V(z) = +\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}z \\ \text{pour } z \leq -a & V(z) = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}a \end{array}\right.$$

3. On reprend le dispositif de la question 2 et l'on perce deux trous de rayons R parfaitement en regard l'un de l'autre, l'un de centre O_1 dans la plaque chargée positivement, l'autre de centre O_2 dans la plaque chargée négativement. Déterminer le champ électrique $\vec{E}(z)$ et le potentiel électrostatique $V(z)$ en tout point M de l'axe O_1O_2.

Nous savons exprimer le champ et potentiel créé par un disque uniformément chargé en un point de son axe. Cela nous permet de traiter ce problème par application du théorème de superposition en partageant la répartition de charge en quatre sous-ensembles, le trou étant obtenu par addition d'un disque de charge surfacique opposé à la charge de chaque plan.



En choisissant l'origine des potentiels à l'infini, le potentiel créé par un disque de charge surfacique σ a pour expression :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$ (*cf.* Cours d'électrostatique, chapitre 2 : potentiel électrique)

Nous en déduisons l'expression du potentiel créé par un disque de charge surfacique $+\sigma$ placé à la cote $z=-a$, avec origine en $z=0$: $V_1(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+(z+a)^2} - |z+a| - \sqrt{R^2+a^2} + a\right)$

De la même façon, nous établissons l'expression du potentiel créé par un disque de charge $-\sigma$ placé à la cote $z=+a$, avec origine en $z=0$: $V_2(z) = \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+(z-a)^2} - |z-a| - \sqrt{R^2+a^2} + a\right)$

La somme de ces deux contributions au potentiel s'écrit donc :

$$V_1(z) + V_2(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+(z+a)^2} - \sqrt{R^2+(z-a)^2} - |z+a| + |z-a|\right)$$

La quantité $-|z+a| + |z-a|$ étant égale à $-2a$ pour $z \geq +a$, $-2z$ pour $-a \leq z \leq +a$ et enfin $+2a$ pour $z \leq -a$ nous obtenons finalement, en additionnant l'ensemble des contributions au potentiel, une expression unique du potentiel, fonction continue impaire de *z*, valable pour toute valeur de *z* :

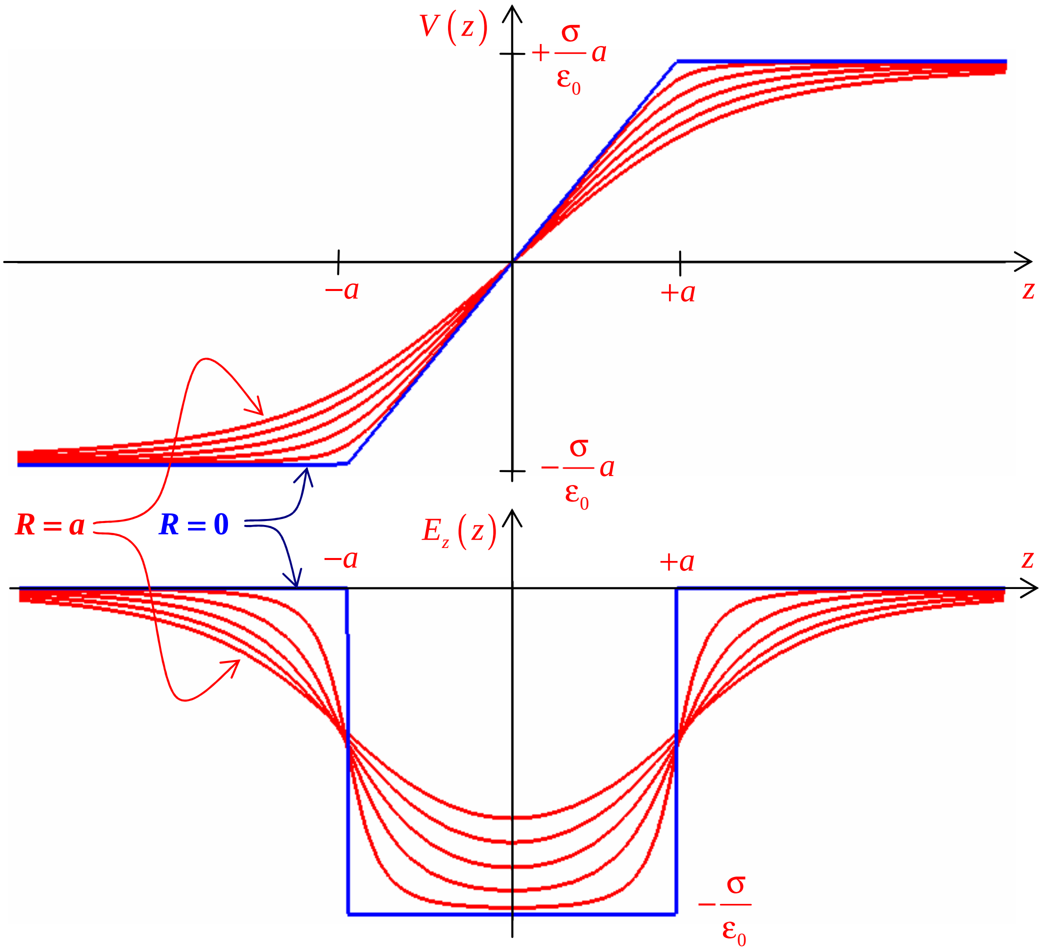
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+(z+a)^2} - \sqrt{R^2+(z-a)^2}\right)$$

Le champ électrique est bien sûr dirigé selon Oz et la valeur algébrique $E_z(z)$, fonction continue paire de *z*, est obtenue par dérivation :

$$E_z(z) = -\frac{dV(z)}{dz} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z+a}{\sqrt{R^2+(z+a)^2}} - \frac{z-a}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right)$$

4. Représenter graphiquement l'allure des variations des fonctions $E_z(z)$ et $V(z)$ pour différentes valeurs de *R*. Qu'observe-t-on lorsque $R \to 0$?

Les fonctions $V(z)$ et $E_z(z)$ sont représentées ci-dessous pour $R = 0$ (couleur bleue) et pour $R = a/5,\ 2a/5,\ 3a/5,\ 4a/5$ et $R = a$.



Nous observons que pour $R = 0$, on retrouve le champ et le potentiel créés par deux plaques parallèles de charges surfaciques opposées.

Note : les courbes présentées ci-dessus sont tracées par le programme MAPLE suivant :

```
> R:=k/5: n:=5:
  V:=sqrt(R^2+(z+1)^2)-sqrt(R^2+(z-1)^2):
  plot([V $k=0..n],z=-3..3,color=[blue,red$n]);
  E:=-diff(V,z):
  plot([E $k=0..n],z=-3..3,color=[blue,red$n]);
```