TD de physique : condensateur cylindrique

Considérons le cas idéal d'un condensateur constitué de deux conducteurs cylindriques infinis de sections circulaires concentriques. Ce condensateur ne peut exister réellement et sa capacité serait infinie. Aussi ne parlerons nous ici que de capacité linéique ou encore « capacité du condensateur par unité de longueur ».

Nous noterons r_1 le rayon du conducteur intérieur porté au potentiel V_1 et r_2 le rayon du conducteur extérieur porté au potentiel V_2. Nous choisirons $V_2 < V_1$ de telle sorte que l'armature intérieure soit porteuse d'une charge positive.

1- En utilisant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en tout point situé entre les armatures du condensateur.

2- En déduire la fonction potentiel V en tout point de l'espace.

3- Représenter les fonctions $E_r(r)$ et $V(r)$.

4- Vérifier que le champ est solution de l'équation locale de Maxwell-Gauss.

On donne l'expression générale de la divergence d'un champ de vecteur en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho E_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

5- Vérifier que le potentiel est solution de l'équation locale de Poisson.

On donne l'expression générale du Laplacien d'une fonction scalaire en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) :

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

6- Déterminer l'expression de la capacité linéique C/ℓ du condensateur cylindrique.

7- Le milieu matériel entre les deux armatures, tout en ayant les propriétés diélectriques du vide, se trouve être un conducteur ohmique de conductivité γ homogène. Calculer la conductance linéique G/ℓ de fuite du condensateur.

8- Démontrer que la relation simple existant entre C et G est une relation très générale, indépendante de la géométrie du condensateur.