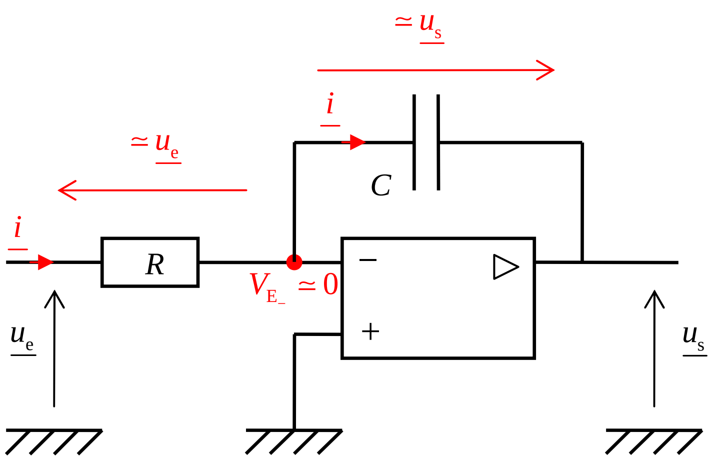
ÉLECTRONIQUE : amplificateur opérationnel, montage intégrateur-corrigé

1. Établir la fonction transfert complexe apparemment réalisée par ce montage et représenter son diagramme de Bode.

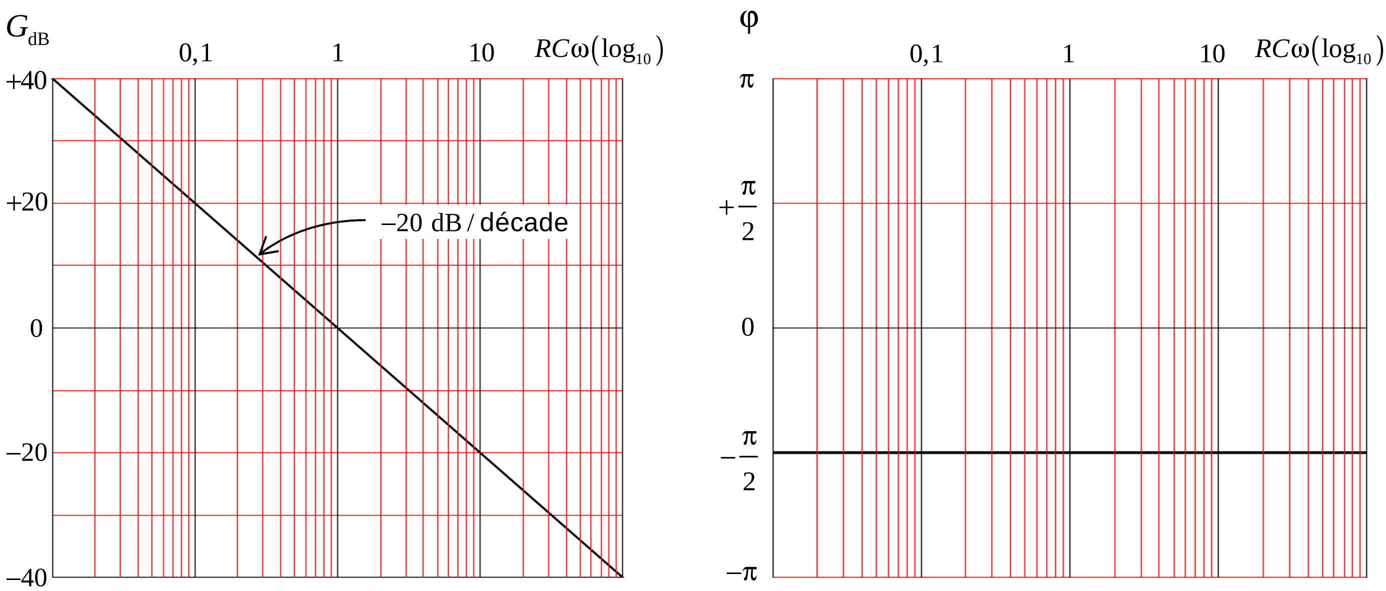


Le fonctionnement en mode linéaire d'un A.O. idéal implique que la tension d'entrée différentielle puisse être considérée comme nulle. Nous avons donc $\underline{V}_{E_-} \simeq 0$ et l'on retrouve les tensions $\underline{u}_e$ et $\underline{u}_s$ aux bornes de la résistance R et du condensateur C.

Le courant entrant dans l'A.O. étant nul, nous pouvons considérer que la résistance et le condensateur sont en série, parcourus par le même courant. Nous pouvons donc appliquer une division de tension pour obtenir la relation entre $\underline{u}_e$ et $\underline{u}_s$ ou, cela revient au même, appliquer le théorème de Millman au point E_- :

$$\underline{V}_{E_-}\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) \simeq 0 = \frac{\underline{u}_e}{R} + jC\omega \underline{u}_s \qquad \text{soit} \qquad \underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

Nous en déduisons le diagramme de Bode : $\begin{cases} G_{dB} = 20\lg\left|\underline{H}\right| = -20\lg RC\omega \\ \varphi = \arg\left(\underline{H}\right) = +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$



Quelle relation existe-t-il idéalement entre les tensions réelles $u_e(t)$ et $u_s(t)$?

Le même courant $i(t)$ parcoure la résistance R et le condensateur C. Pour la résistance, nous pouvons écrire, en convention récepteur : $u_e(t) = +Ri(t)$.

Pour le condensateur, en convention générateur : $i(t) = -C\dfrac{du_s(t)}{dt}$

Nous en déduisons : $i(t) = -C\dfrac{du_s(t)}{dt} = \dfrac{1}{R}u_e(t)$, soit $u_s(t) = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int_0^t u_e(t')\,dt'$

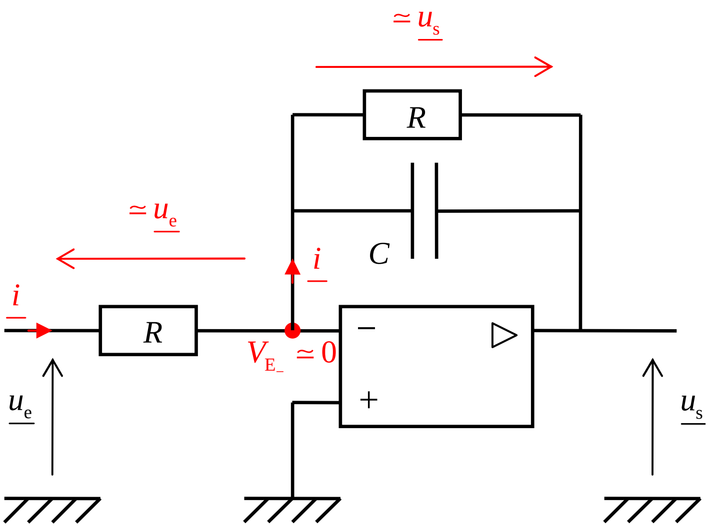
Ce montage serait donc idéalement un *intégrateur inverseur*. La suite nous prouva que non…

2. L'A.O. est alimenté par une tension sinusoïdale $u_e(t) = u_0 + u_m \cos\omega t$. Déterminer la tension de sortie $u_s(t)$ dans l'hypothèse d'un fonctionnement idéal de l'A.O. Que peut-on en conclure ?

$$u_s(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t u_e(t')\,dt' = -\frac{1}{RC}\int_0^t (u_0 + u_m\cos\omega t')\,dt' = -u_0\frac{t}{RC} - \frac{u_m}{RC\omega}\sin\omega t$$

Le premier terme $-u_0\dfrac{t}{RC}$, aussi petit que soit u_0, est toujours divergent. L'amplificateur opérationnel évolue donc vers un état de saturation : ce prétendu montage intégrateur ne peut fonctionner en mode linéaire.

3. Pour réaliser un montage intégrateur fonctionnant correctement, on dispose une résistance R' en parallèle avec le condensateur. Établir la fonction transfert complexe réalisée par ce montage et représenter son diagramme de Bode.



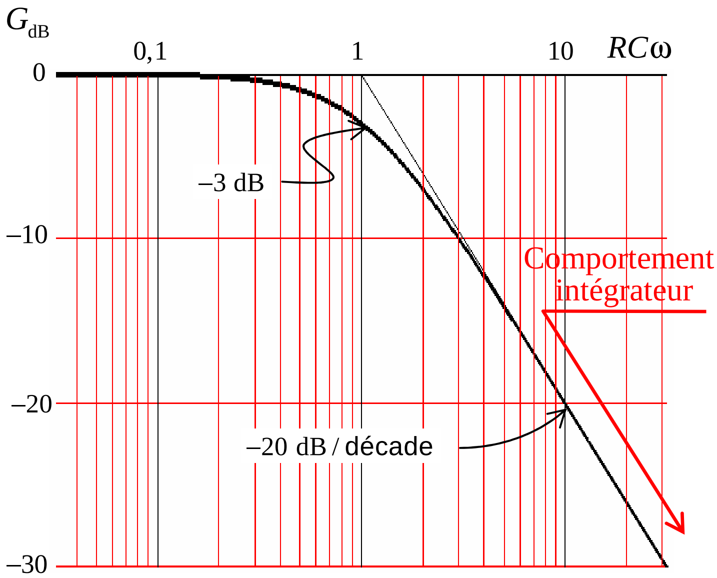
Appliquons le théorème de Millman en E_- :

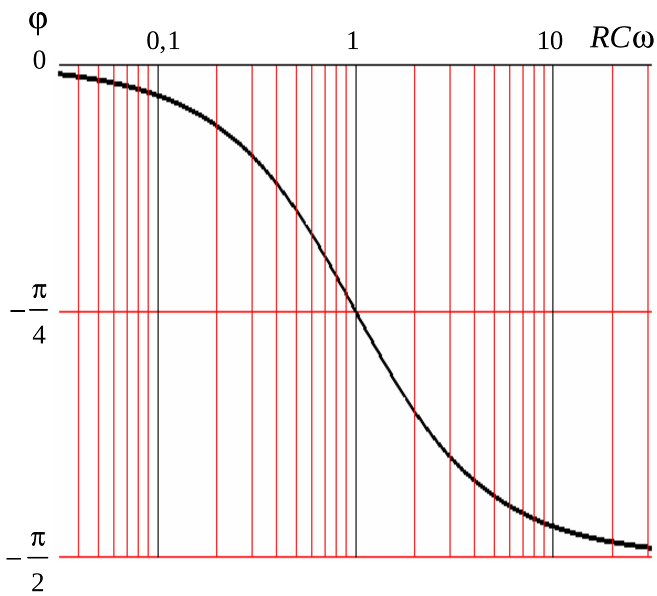
$$\underline{V_{E_-}}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jC\omega\right) \simeq 0 = \frac{\underline{u_e}}{R} + \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)\underline{u_s}$$

Soit : $$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = -\frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Nous y reconnaissons la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure $\omega_c = \dfrac{1}{RC}$.

Le diagramme de Bode met en évidence le comportement intégrateur de ce filtre en haute fréquence, pour des pulsations très grandes par rapport à ω_c.





Quelle relation existe-t-il entre les tensions réelles $u_e(t)$ et $u_s(t)$?

Nous devons écrire que le courant $i(t)$ se partage entre la résistance et le condensateur :

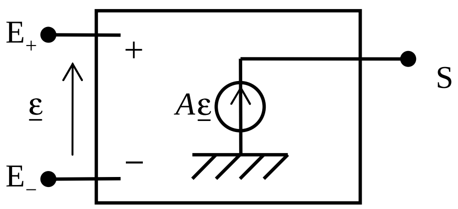
$$i(t) = \frac{1}{R}u_e(t) = -\frac{1}{R}u_s(t) - C\frac{du_s(t)}{dt}$$

soit :
$$\frac{du_s(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_s(t) = -\frac{1}{RC}u_e(t)$$

Dans quelle condition d'utilisation ce montage peut-il être considéré comme un montage intégrateur ?

Nous obtenons par approximation une relation de montage intégrateur $\frac{du_s(t)}{dt} \simeq -\frac{1}{RC}u_e(t)$ dans l'hypothèse où l'on peut considérer que $u_s(t)$ est très petit par rapport à $u_e(t)$. Cela revient à considérer que la pulsation ω est très grande par rapport à la pulsation de coupure ω_c.

4. L'A.O. sera considéré comme un composant linéaire conforme au schéma équivalent ci-dessous.



L'A.O. est inclus dans le montage intégrateur défini à la question précédente.

On prend $A = A_0$, valeur finie très élevée (10^4 à 10^6). Quelle est la nouvelle relation entre la tension de sortie complexe $\underline{u}_s$ et la tension d'entrée complexe $\underline{u}_e$? Conclusion ?

Nous avons toujours $\underline{V}_{E_+} = 0$ avec dorénavant $\underline{V}_{E_-} = -\underline{\varepsilon}$ et $\underline{u}_s = A_0\,\underline{\varepsilon}$.

Le théorème de Millman appliqué en E_- s'écrit donc :

$$\underline{V}_{E_-}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+jC\omega\right)=-\underline{\varepsilon}\left(\frac{2}{R}+jC\omega\right)=-\frac{\underline{u}_s}{A_0}\left(\frac{2}{R}+jC\omega\right)=\frac{\underline{u}_e}{R}+\left(\frac{1}{R}+jC\omega\right)\underline{u}_s$$

soit :
$$H=\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}=-\frac{1}{1+\dfrac{2}{A_0}+jRC\omega\left(1+\dfrac{1}{A_0}\right)}$$

Étant donnée la très grande valeur de A_0, la fonction de transfert n'est pas très différente et le comportement du circuit ne sera pas sensiblement modifié.

5. $A=\dfrac{A_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$. Lorsque l'A.O. fonctionne en mode linéaire non sinusoïdal, quelle est l'équation différentielle liant la tension de sortie $u_s(t)$ et la tension d'entrée $u_e(t)$? Le montage est-il stable ? La condition de stabilité est-elle une condition suffisante de linéarité ?

La relation entre amplitudes complexes $\underline{u}_s\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)=A_0\underline{\varepsilon}$ est la traduction en régime sinusoïdal d'une équation différentielle linéaire qui s'écrit : $u_s(t)+\dfrac{1}{\omega_0}\dfrac{du_s(t)}{dt}=A_0\varepsilon(t)$

La loi des nœuds en E_- s'écrit : $\dfrac{u_e(t)+\varepsilon(t)}{R}=-\dfrac{u_s(t)+\varepsilon(t)}{R}-C\dfrac{d}{dt}\big(u_s(t)+\varepsilon(t)\big)$

Nous en déduisons l'équation différentielle à laquelle satisfait $u_s(t)$:

$$\left(1+\frac{2}{A_0}\right)u_s+\left(RC\left(1+\frac{1}{A_0}\right)+\frac{2}{\omega_0A_0}\right)\frac{du_s}{dt}+\frac{RC}{\omega_0A_0}\frac{d^2u_s}{dt^2}=-u_e(t)$$

Étant donnée la très grande valeur de A_0, nous écrirons aussi bien :

$$u_s+\left(RC+\frac{2}{\omega_0A_0}\right)\frac{du_s}{dt}+\frac{RC}{\omega_0A_0}\frac{d^2u_s}{dt^2}=-u_e(t)$$

L'équation différentielle sans second membre est une équation linéaire du second ordre admettant pour équation caractéristique : $1+\left(RC+\dfrac{2}{\omega_0A_0}\right)r+\dfrac{RC}{\omega_0A_0}r^2=0$.

Le déterminant de cette équation s'écrit : $\Delta=\left(RC+\dfrac{2}{\omega_0A_0}\right)^2-4\dfrac{RC}{\omega_0A_0}=R^2C^2+\left(\dfrac{2}{\omega_0A_0}\right)^2>0$

Ce déterminant, toujours positif, admet deux racines réelles. La somme $-\left(\omega_0A_0+\dfrac{2}{RC}\right)$ de ces racines étant négative et leur produit $+\dfrac{\omega_0A_0}{RC}$ étant positif, nous en déduisons que ces deux racines sont négatives. Notons les $-\tau'$ et $-\tau''$.

Les solutions de cette équation sont des combinaisons linéaires de fonctions exponentielles amorties de la forme $K'e^{-\frac{t}{\tau'}}+K''e^{-\frac{t}{\tau''}}$.

Les régimes transitoires qui précèdent la réponse sinusoïdale sont donc amortis au bout d'un temps qui est de l'ordre grandeur de $\max\left(RC, \tau', \tau''\right)$. On peut donc affirmer que le montage est stable.

Bien sûr, cela n'empêche pas l'A.O. d'atteindre les saturations dans le cas où le signal d'entrée a une amplitude trop importante : la condition de stabilité n'est pas une condition suffisante de linéarité.

6. Un expérimentateur étourdi inverse les deux entrées de l'A.O. Démontrer que l'A.O. ne peut pas fonctionner de façon stable. Quelle observation fera-t-on sur la sortie du montage ?

La loi des nœuds en E_+ s'écrit : $\dfrac{u_e(t)-\varepsilon(t)}{R} = -\dfrac{u_s(t)-\varepsilon(t)}{R} - C\dfrac{d}{dt}\left(u_s(t)-\varepsilon(t)\right)$

Nous en déduisons l'équation différentielle à laquelle satisfait $u_s(t)$:

$$\left(1-\frac{2}{A_0}\right)u_s + \left(RC\left(1-\frac{1}{A_0}\right)-\frac{2}{\omega_0 A_0}\right)\frac{du_s}{dt} - \frac{RC}{\omega_0 A_0}\frac{d^2u_s}{dt^2} = -u_e(t)$$

Étant donnée la très grande valeur de A_0, nous écrirons aussi bien :

$$u_s + \left(RC - \frac{2}{\omega_0 A_0}\right)\frac{du_s}{dt} - \frac{RC}{\omega_0 A_0}\frac{d^2u_s}{dt^2} = -u_e(t)$$

L'équation différentielle sans second membre est une équation linéaire du second ordre admettant pour équation caractéristique : $1+\left(RC-\dfrac{2}{\omega_0 A_0}\right)r - \dfrac{RC}{\omega_0 A_0}r^2 = 0$.

Le déterminant de cette équation s'écrit : $\Delta = \left(RC - \dfrac{2}{\omega_0 A_0}\right)^2 + 4\dfrac{RC}{\omega_0 A_0} = R^2C^2 + \left(\dfrac{2}{\omega_0 A_0}\right)^2 > 0$

Ce déterminant est le même que précédemment, toujours positif. Il admet deux solutions réelles, mais cette fois, le produit $-\dfrac{\omega_0 A_0}{RC}$ des racines est négatif. Les solutions de cette équation comprennent donc une fonction exponentielle divergente.

Les régimes transitoires qui précèdent la réponse sinusoïdale sont donc divergents et l'on peut affirmer que le montage est instable.