

TD07 Magnétostatique. Solénoïde d'épaisseur non nulle - corrigé

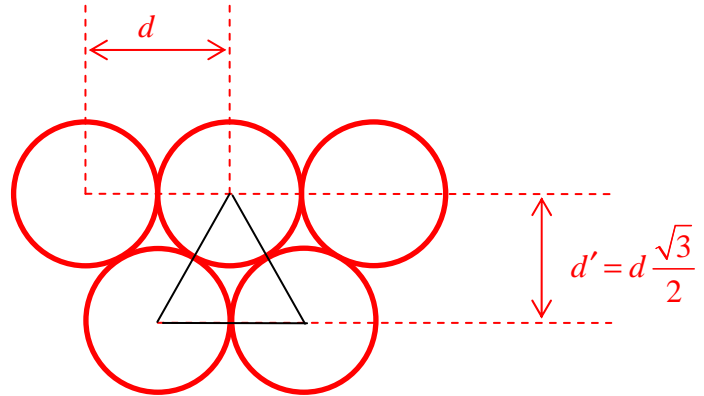
1. L'enroulement est compact. Sur une même couche les fils sont jointifs et le nombre de fils par unité de longueur a donc pour valeur $n = d^{-1}$. Sur la couche suivante, les fils sont décalés d'un demi diamètre $d/2$ et se disposent ainsi au plus près de l'axe Oz du solénoïde. Quel est alors la valeur m du nombre de fils par unité d'épaisseur du solénoïde ?

La distance d' entre deux couches successives en épaisseur est égale à la hauteur du triangle équilatéral de côté d , soit :

$$d' = d \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le nombre de fils par unité d'épaisseur est donc $m = d'^{-1}$, soit :

$$m = \frac{1}{d'} = \frac{1}{d} \frac{2}{\sqrt{3}}$$



2. Nous allons modéliser le solénoïde comme une distribution de courant de symétrie cylindrique décrit par une densité de courant de la forme $\vec{j} = j_0 \vec{e}_\phi$. Quelle valeur doit-on choisir pour la constante j_0 de telle sorte que ce modèle corresponde au mieux au solénoïde décrit à la question précédente lorsque le fil est parcouru par un courant d'intensité I ?

Le nombre de fils par unité de surface orthogonale aux fils a pour expression nm .

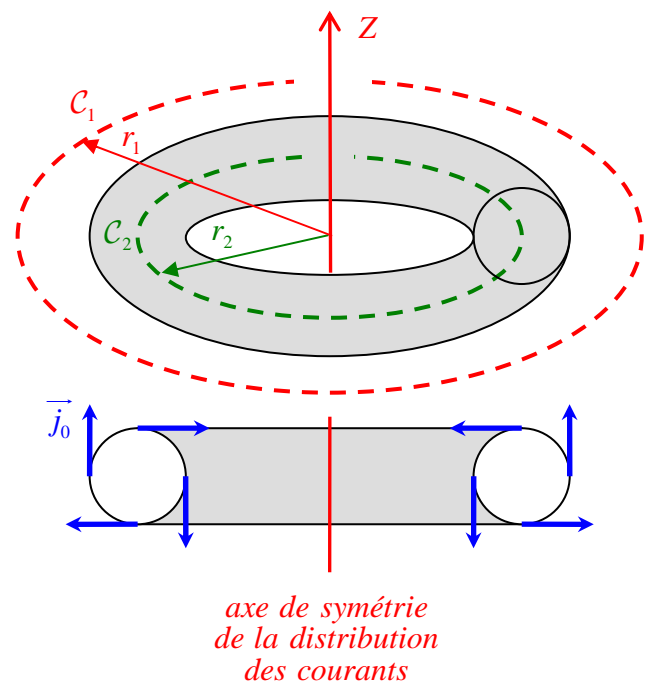
j_0 , intensité de courant par unité de surface orthogonale aux fils a donc pour expression :

$$j_0 = nmI = \frac{2I}{\sqrt{3} d^2}$$

3. En considérant qu'un solénoïde cylindrique de longueur infinie correspond à un solénoïde torique dans la limite où le rayon de courbure R du tore tend vers l'infini, démontrer que le champ magnétique est nécessairement nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur d'un solénoïde cylindrique de longueur infinie et déterminer l'expression du champ magnétique \vec{B}_{int} .

Étudions les symétries de la distribution des courants pour un solénoïde torique :

Tout plan contenant l'axe de révolution du tore est un plan de symétrie de la distribution des courants et, par conséquent, un plan d'antisymétrie des champs magnétiques. Chaque point M de l'espace appartient à un tel plan : nous pouvons en déduire que le champ \vec{B} en M est orthoradial dans le système de coordonnées cylindropolaires (r, θ, Z) du tore.



axe de symétrie de la distribution des courants

Remarque : il ne faut pas confondre ce système de coordonnées avec le système (ρ, φ, z) préconisé dans l'énoncé pour le solénoïde cylindrique.

Considérant un parcours d'Ampère extérieur au tore et centré sur l'axe du tore tel que le parcours C_1 , nous pouvons affirmer, aucun courant n'étant alors enlacé, que la circulation du champ \vec{B} sur un tel parcours est nul. De part les symétrie, cette circulation s'exprime comme $2\pi r_1 B_\theta(r_1)$. Nous en déduisons que le champ \vec{B} est nul à l'extérieur du tore.

Pour un parcours tel que C_2 intérieur au tore, le courant enlacé est égal au courant I multiplié par le nombre total N de spires enroulées sur le tore. Nous avons alors $2\pi r_2 B_\theta(r_2) = \mu_0 N I$, soit :

$$B_\theta(r_2) = \mu_0 \frac{N}{2\pi R} \frac{R}{r_2} I$$

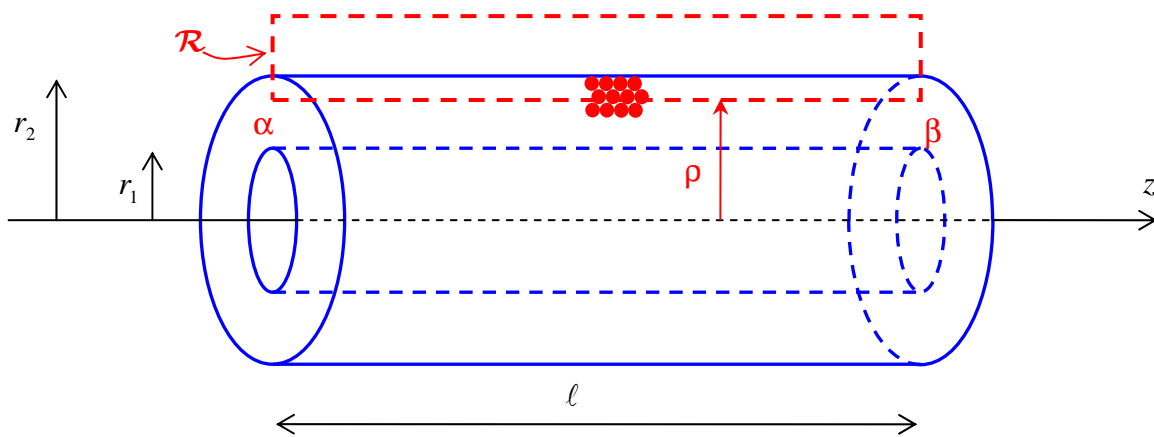
Ces propriétés restent vraies lorsque le rayon de courbure R du tore tend vers l'infini, le nombre de spire par unité de longueur $p = \frac{N}{2\pi R}$ restant constant. Le tore évolue alors vers un solénoïde linéaire de longueur infinie. Ceci démontre que le champ magnétique à l'extérieur du solénoïde rectiligne infini est nul et que le champ à l'intérieur du solénoïde rectiligne infini est axial et uniforme, de valeur :

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 p I \vec{e}_z$$

Dans le cas du solénoïde décrit précédemment, le nombre de spires par unité de longueur a pour valeur $p = nm(r_2 - r_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{r_2 - r_1}{d^2}$, ce qui nous donne, pour $\rho < r_1$:

$$\vec{B}_{\text{int}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{r_2 - r_1}{d^2} \mu_0 I \vec{e}_z = \mu_0 j_0 (r_2 - r_1) \vec{e}_z$$

4. Déterminer l'expression du champ d'induction magnétique \vec{B} pour $r_1 < \rho < r_2$.



Dans ce cas, choisissant toujours le parcours d'Ampère rectangulaire \mathcal{R} représenté ci-dessus, l'intensité enlacée a pour expression $I_{\text{enlacée}} = j_0 \ell (r_2 - \rho) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\ell (r_2 - \rho)}{d^2} I$ et la circulation de \vec{B} n'est

non nulle que sur le parcours $\alpha\beta$:
$$\oint_{\mathcal{R}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\alpha\beta} B_z(\rho) dz = B_z(\rho) \int_{\alpha\beta} dz = B_z(\rho) \ell$$

D'après le théorème d'Ampère, nous en concluons : $B_z(\rho) = \mu_0 \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{r_2 - \rho}{d^2} I$, soit :

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{r_2 - \rho}{d^2} I \vec{e}_z = \mu_0 p \frac{r_2 - \rho}{r_2 - r_1} I \vec{e}_z \quad \text{pour} \quad r_1 < \rho < r_2$$

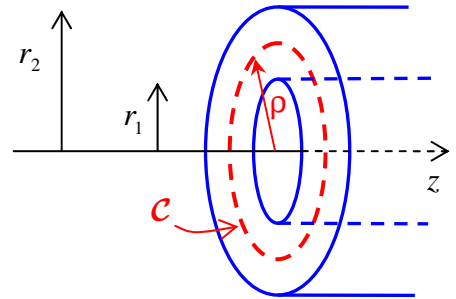
Remarque : $\vec{B}(r_2) = \vec{0}$ et $\vec{B}(r_1) = \vec{B}_{\text{int}}$. Le champ d'induction magnétique est continu. En l'absence de courant de surface, ceci était une nécessité.

5. Déterminer l'expression du potentiel vecteur \vec{A} dans tout l'espace.

Remarquons tout d'abord que le potentiel vecteur \vec{A} , choisi selon la condition de jauge de Coulomb, doit avoir les mêmes propriétés de symétrie que les courants. Tout plan contenant l'axe Oz du solénoïde étant un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, cela implique que le potentiel vecteur soit en tout point de l'espace orthogonal à ce plan, c'est-à-dire orthoradial : $\vec{A} = A_\phi \vec{e}_\phi$

De plus, les invariances du problème par translation selon Oz et par rotation autour de Oz imposent que la composante A_ϕ ne dépende que de ρ : $\vec{A} = A_\phi(\rho) \vec{e}_\phi$.

La fonction $A_\phi(\rho)$ est déterminée en écrivant que la circulation de \vec{A} sur un cercle C de rayon ρ centré sur l'axe Oz et orthogonal à Oz est égale au flux de \vec{B} à travers ce cercle :



$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi\rho A_\phi(\rho) = \iint_C \vec{B} \cdot \vec{n}_+ dS = \iint_C B_z(\rho) dS = \int_0^\rho 2\pi\rho' B_z(\rho') d\rho'$$

Soit :
$$A_\phi(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho' B_z(\rho') d\rho'$$

Pour $\rho < r_1$, le champ \vec{B} étant uniforme, le potentiel a pour expression simple :

$$A_\phi(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho' B_{\text{int}} d\rho' = \frac{1}{2} \rho B_{\text{int}} = \mu_0 \frac{2(r_2 - r_1) I}{\sqrt{3} d^2} \frac{\rho}{2} = \mu_0 p I \frac{\rho}{2}$$

où p est le nombre de spires par unité de longueur.

Nous en déduisons en particulier : $A_\phi(r_1) = \mu_0 p I \frac{r_1}{2}$

Pour $r_1 < \rho < r_2$, le potentiel vérifie $A_\phi(\rho) = \mu_0 p I \frac{r_1^2}{2\rho} + \frac{1}{\rho} \int_{r_1}^\rho \rho' B_z(\rho') d\rho'$

Soit : $A_\phi(\rho) = \mu_0 p I \frac{r_1^2}{2\rho} + \mu_0 I \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\rho d^2} \int_{r_1}^\rho \rho'(r_2 - \rho') d\rho' = \mu_0 p I \frac{3r_2\rho^2 - 2\rho^3 - r_1^3}{6\rho(r_2 - r_1)}$

Nous en déduisons en particulier : $A_\phi(r_2) = \mu_0 p I \frac{r_2^3 - r_1^3}{6r_2(r_2 - r_1)} = \mu_0 p I \frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{6r_2}$

Enfin, pour $\rho > r_2$, le potentiel a pour expression : $A_\phi(\rho) = \mu_0 p I \frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2}{6\rho}$

6. Déterminer la valeur de l'énergie magnétostatique par unité de longueur de solénoïde.

• *Premier calcul* : l'énergie magnétostatique s'exprime comme l'intégrale de $\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A}$ étendue à tout l'espace où sont localisés les courants.

Avec $\vec{j} = j_0 \vec{e}_\phi = \frac{2I}{\sqrt{3}d^2} \vec{e}_\phi = \frac{p}{r_2 - r_1} \vec{e}_\phi$ et $\vec{A} = \mu_0 I \frac{p}{r_2 - r_1} \frac{3r_2 \rho^2 - 2\rho^3 - r_1^3}{6\rho} \vec{e}_\phi$, cela s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \iiint_\tau \frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{p^2}{(r_2 - r_1)^2} I^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{3r_2 \rho^2 - 2\rho^3 - r_1^3}{6\rho} \times 2\pi \ell \rho d\rho = \frac{1}{2} \mu_0 \ell \pi p^2 \frac{r_2^2 + 2r_1 r_2 + 3r_1^2}{6} I^2$$

où $p = \frac{2(r_2 - r_1)}{\sqrt{3}d^2}$ est le nombre de spires par unité de longueur.

Finalement, l'énergie magnétique linéique peut se mettre sous la forme : $\frac{\mathcal{E}_m}{\ell} = \frac{1}{2} \frac{L}{\ell} I^2$

Nous obtenons ainsi l'expression de l'inductance linéique du solénoïde épais :

$$\frac{L}{\ell} = \pi \mu_0 p^2 \frac{r_2^2 + 2r_1 r_2 + 3r_1^2}{6}$$

Remarque : dans le cas limite d'un solénoïde de faible épaisseur ($r_1 = r_2 = r$), nous retrouvons bien la formule classique de l'inductance linéique du solénoïde idéal : $\frac{L}{\ell} = \pi r^2 \mu_0 p^2$.

• *Deuxième calcul* : l'énergie magnétostatique s'exprime comme l'intégrale de $\frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$ étendue à tout

l'espace où le champ \vec{B} n'est pas nul.

Cette énergie peut se partitionner en une énergie \mathcal{E}_{m1} correspondant au volume intérieur du solénoïde et une énergie \mathcal{E}_{m2} située dans le cuivre.

À l'intérieur le champ est uniforme, on en déduit immédiatement $\mathcal{E}_{m1} = \pi r_1^2 \ell \frac{B_{int}^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \pi r_1^2 \mu_0 p^2 \ell I^2$.

L'énergie \mathcal{E}_{m2} est un peu plus difficile à calculer :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m2} &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{r_1}^{r_2} (B_z(\rho))^2 \times 2\pi \ell \rho d\rho = \pi \mu_0 \ell p^2 I^2 \frac{1}{(r_2 - r_1)^2} \int_{r_1}^{r_2} (r_2 - \rho)^2 \rho d\rho \\ &= \frac{1}{2} \pi \mu_0 \ell p^2 I^2 \frac{(r_2 - r_1)(r_2 + 3r_1)}{6} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi décomposé l'inductance linéique en deux termes, le premier correspondant à l'énergie magnétique localisée dans l'air et le second à l'énergie magnétique localisée dans le cuivre :

$$\frac{L}{\ell} = \pi \mu_0 p^2 r_1^2 + \pi \mu_0 p^2 \frac{(r_2 - r_1)(r_2 + 3r_1)}{6} = \pi \mu_0 p^2 \frac{r_2^2 + 2r_2 r_1 + 3r_1^2}{6}$$

Bien évidemment, les deux calculs conduisent au même résultat.