Magnétostatique. Courant uniforme dans un fil cylindrique - corrigé

Soit un fil infini rectiligne de rayon R parcouru par un courant d'intensité I uniformément répartie sur toute la section du conducteur.

1- Faire apparaître les propriétés de symétrie de la distribution de courant et en déduire les propriétés de symétrie du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ et du potentiel vecteur $\vec{A}$ choisi selon la jauge de Coulomb.

La distribution de courant est invariante par translation le long de l'axe du fil et par rotation autour de cet axe. Le choix de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) ayant cette symétrie s'impose donc tout naturellement, les composantes des vecteurs dans ce système de coordonnées ne pouvant dépendre que de ρ.

Le plan orthogonal à l'axe du câble passant par un point M quelconque est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant : le potentiel vecteur $\vec{A}$ en M, qui est un vecteur polaire, est donc orthogonal à ce plan : $\vec{A} = A_z(\rho)\vec{e}_z$

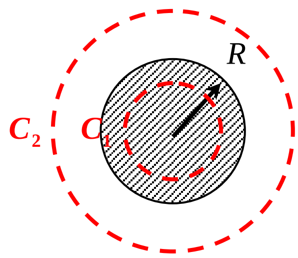
Le plan contenant l'axe du câble passant par un point M quelconque est un plan de symétrie de la distribution de courant : le champ magnétique $\vec{B}$ en M, qui est un vecteur axial, est donc orthogonal à ce plan : $\vec{B} = B_\varphi(\rho)\vec{e}_\varphi$.

2 - Calculer le champ $\vec{B}$ en tout point M de l'espace. On distinguera bien le cas où le point M est extérieur au fil et la cas où le point M est intérieur au fil. On fera l'hypothèse que le matériau conducteur a les mêmes propriétés magnétiques que le vide.

Nous allons bien sûr appliquer le théorème d'Ampère sur un parcours circulaire de rayon ρ centré sur l'axe Oz, ayant les symétries du problème de telle sorte que sur ce parcours la circulation du champ magnétique s'exprime très simplement :

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \oint_C B_\varphi(\rho)\vec{e}_\varphi\cdot\rho\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi = \rho\, B_\varphi(\rho)\oint_C d\varphi = 2\pi\rho\, B_\varphi(\rho)$$

Pour le calcul du courant en lacé, il faut distinguer les deux cas de figure :



1) $\rho < R$ (parcours C_1) seule une partie du courant circulant dans l'âme du câble coaxial est enlacée, proportionnelle à la surface délimitée par C_1 : $I_{\text{enlacé}} = I\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} = I\dfrac{r^2}{R^2}$

2) $\rho > R$ (parcours C_2) la totalité du courant circulant dans l'âme du câble coaxial est enlacée : $I_{\text{enlacé}} = I$

Par application du théorème d'Ampère, nous écrirons : $\oint_C \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$, soit $B_\varphi(\rho) = \dfrac{\mu_0 I_{\text{enlacé}}}{2\pi\rho}$

Pour chaque cas de figure cela conduit aux expressions suivantes du champ :

1) $\rho < R$: $B_\varphi(\rho) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{\rho}{R^2}$ soit $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{\rho}{R^2}\vec{e}_\varphi$

2) $\rho > R$: $B_\varphi(\rho) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ soit $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}_\varphi$

3 - On connaît l'expression du rotationnel d'un champ vectoriel en coordonnées cylindriques $(\rho,\ \varphi,\ z)$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e_\rho}+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\vec{e_\varphi}+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e_z}$$

En utilisant cette expression, calculer le potentiel vecteur $\vec{A}$, choisi selon la jauge de Coulomb, en tout point M de l'espace.

Nous savons *a priori* par l'étude de symétrie que $\vec{A}$ n'a qu'une composante A_z et que celle-ci n'est fonction que de ρ. Nous en déduisons la forme plus simple du rotationnel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e_\rho}+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\vec{e_\varphi}+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e_z}=-\frac{dA_z}{d\rho}\vec{e_\varphi}=\vec{B}$$

Nous en déduisons $B_\varphi=-\dfrac{dA_z}{d\rho}$ soit : $A_z(\rho)=A_z(\rho_0)-\displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho}B_\varphi(\rho')\,d\rho'$

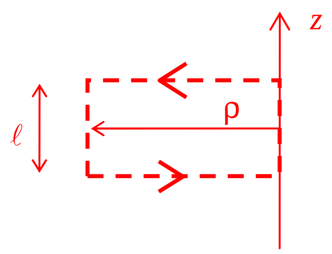
Nous avons le choix de l'origine des potentiels, mais dans notre cas, le choix usuel d'un potentiel nul à l'infini n'est pas possible. *Choisissons le potentiel nul à la surface du fil*. Nous obtenons alors :

1) $\rho<R$: $A_z(\rho)=-\displaystyle\int_R^{\rho}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\rho'}{R^2}d\rho'=+\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)$ soit $\vec{A}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right)\vec{e_z}$

2) $\rho>R$: $A_z(\rho)=-\displaystyle\int_R^{\rho}\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho'}d\rho'=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{\rho}{R}$ soit $\vec{A}=-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{\rho}{R}\vec{e_z}$

4 - Retrouver ce résultat sans utiliser la formule ci-dessus, mais en considérant la relation liant le flux de $\vec{B}$ à la circulation de $\vec{A}$.

En choisissant un parcours rectangulaire tel que celui représenté ci-contre, la circulation de $\vec{A}$ s'écrit :



$$\oint_C \vec{A}\cdot\vec{d\ell}=-\left(A_z(\rho)-A_z(0)\right)\ell$$

Cette circulation est égale au flux de $\vec{B}$ à travers le parcours qui s'écrit sous la forme d'une intégrale simple : $\displaystyle\iint_S\vec{B}\cdot\vec{n}\,dS=\int_0^{\rho}B_\varphi(\rho)\vec{e_\varphi}\cdot\vec{e_\varphi}\ell\,d\rho=\ell\int_0^{\rho}B_\varphi(\rho)\,d\rho$

Étant donnée la formule de Stokes, $\displaystyle\oint_C\vec{A}\cdot\vec{d\ell}=\iint_S\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S\vec{B}\cdot\vec{n}\,dS$, nous arrivons à la même conclusion : la composante A_z du potentiel vecteur est égale à l'opposé d'une primitive de la composante orthoradiale B_φ du champ magnétique.

5 - Que peut-on dire de l'énergie magnétique associée à un tel courant ?

L'énergie magnétique associée à un tel courant est infinie. L'énergie linéique est elle-même infinie. Cela n'a rien d'étonnant : ce problème ne correspond pas à une situation réelle possible. Ce courant qui part à l'infini doit bien revenir par quelque part !