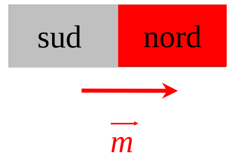
Induction électromagnétique. Aimant se déplaçant sur l’axe d’une spire-corrigé

1- Qu’appelle-t-on « pôle nord » ?

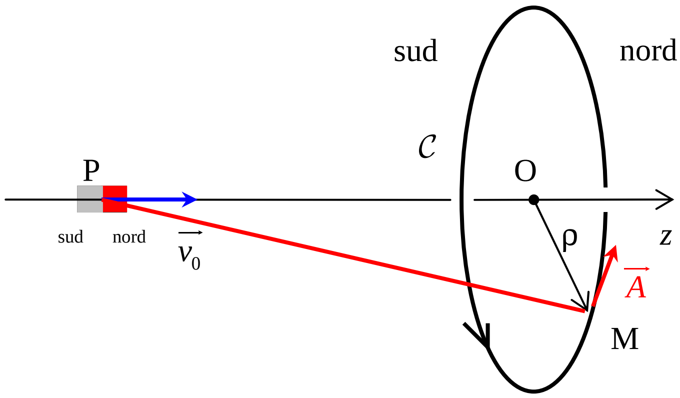
Historiquement, on appelle « pôle nord » d’un aimant le pôle qui, soumis au champ magnétique terrestre, est « attiré par le nord ». Les lignes de champ de l’aimant vont du pôle nord de l’aimant vers le pôle sud. Le moment magnétique est dirigé du sud vers le nord :



2- Neumann ou de Lorentz ?

Le circuit électrique est fixe et indéformable et le phénomène d’induction est dû à une variation du champ magnétique inducteur : il s’agit d’un phénomène de Neumann.

3- Décrire **qualitativement** l’ensemble des phénomènes physiques :



apparaît-il un courant $i(t)$ dans la spire ?

Oui, il apparaît un courant $i(t)$ de telle sorte que la spire présente une face Nord en direction de l’aimant et que celui-ci soit de ce fait contrarié dans son mouvement : la loi de Lenz l’impose.

Quel est le signe de ce courant ? Sur le schéma, la face nord de la spire tourne le dos à l’aimant : le courant $i(t)$ doit donc être négatif.

L’aimant est-il soumis à une force ? Toujours selon la loi de Lenz, l’aimant doit être soumis à une force qui s’oppose à son déplacement, c’est-à-dire à une force répulsive dans la phase d’approche et attractive dans la phase où l’aimant, ayant traversé la spire en son centre, s’éloigne de celle-ci.

La spire est-elle soumise à une force ? La spire est bien sûr soumise à une force opposée.

4- Exprimer le champ électromoteur en tout point de la spire et en déduire les variation du courant $i(t)$.

Le potentiel vecteur $\overrightarrow{A(\mathrm{M})}$ est donc orthoméridien : $\overrightarrow{A(\mathrm{M})} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m\rho}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_\varphi$

Dans un phénomène de Neumann, le champ électromoteur peut être défini par la relation

$$\vec{E}_{\text{em}}(\mathrm{M}) = -\frac{\partial \overrightarrow{A(\mathrm{M})}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi} m\rho\,\vec{e}_\varphi\, v_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = +\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3m\rho v_0 z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}\vec{e}_\varphi$$

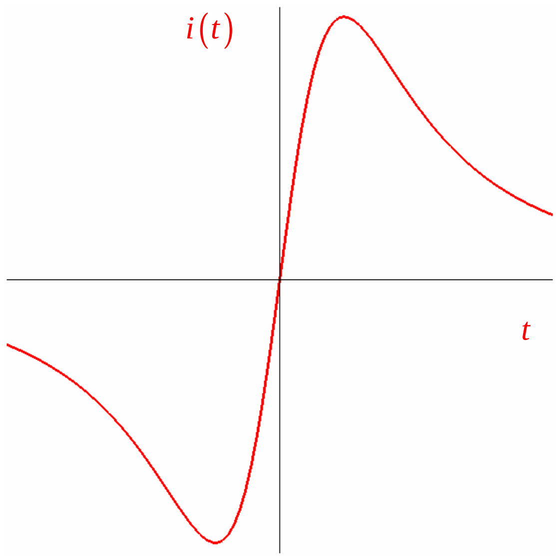
La circulation du champ électromoteur a donc pour expression :

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E}_{\text{em}}(\mathrm{M})\cdot\overrightarrow{d\ell} = +\frac{\mu_0}{2}\frac{3m\rho^2 v_0 z}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Il reste à écrire que cette force électromotrice induit un courant $i(t)$ selon la loi d’Ohm, avec $z = v_0 t$:

$$i(t) = +\frac{\mu_0}{2R}\frac{3m\rho^2 v_0^2 t}{\left(\rho^2 + v_0^2 t^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Remarque : le courant $i(t)$ est bien négatif pour $t < 0$, dans la phase d'approche, et positif pour $t > 0$, lorsque l'aimant s'éloigne de la spire après l'avoir traversée en son centre. Dans les deux phases du mouvement, l'aimant est repoussé par la spire.



5- Calculer le flux $\phi(t)$ du champ magnétique de l'aimant à travers la spire.

Le flux du champ magnétique est égal à la circulation du potentiel vecteur :

$$\phi = A_\varphi \times 2\pi\rho = \frac{\mu_0}{2}\frac{m\rho^2}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Retrouver l'expression de $i(t)$ par application de la loi de Faraday.

$$i(t) = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 m\rho^2}{2R}\frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{3\mu_0 m\rho^2}{2R}\frac{v_0 z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

6- Exprimer la force $\overrightarrow{F(t)}$ que doit subir l'aimant pour se déplacer ainsi sur l'axe de la spire.

Nous admettrons ce résultat déjà plusieurs fois démontré : le champ créé en un point de son axe par une spire de rayon ρ parcourue par un courant i est axial et sa valeur algébrique a pour expression $B_z = \frac{\mu_0 i}{2\rho}\sin^3\alpha$, où α est l'angle sous lequel est vu le rayon de la spire. Le champ créé par la spire, induit par le déplacement de l'aimant, a donc pour expression en P : $B_z(z, t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2}\frac{\rho^2}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

L'aimant subit une force $\vec{F} = \left(\vec{m}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{B}$, proportionnelle dans le cas présent, au gradient de ce champ :

$$F_z = m\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{3\mu_0^2 m\rho^4}{4R}\frac{v_0 z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = -\frac{9\mu_0^2 m\rho^4}{4R}\frac{v_0 z^2}{\left(\rho^2 + z^2\right)^5}$$

Remarque : cette force est toujours négative, l'aimant est toujours contrarié dans son mouvement.