Bilan énergétique d'un solénoïde en régime variable-corrigé

1- Que signifie l'expression « lentement » variable ? Expression de $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde ?

Nous nous plaçons délibérément dans le cadre de l'approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS). C'est une condition pour que l'on puisse parler du courant dans le solénoïde sans préciser à quel endroit dans le solénoïde, c'est-à-dire dans quelle spire.

Dans l'ARQS, le champ magnétique a la même expression qu'en régime permanent, soit :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{j_S} \wedge \vec{e_r} = \mu_0 n\, i(t)\, \vec{e_z} = \mu_0 n\, i_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}\, \vec{e_z}$$

où $\vec{e_z}$ est le vecteur unitaire selon l'axe du solénoïde orienté par le sens du courant I.

2- Symétries du champ électrique $\vec{E}$

L'équation de Maxwell-Faraday nous indique que le champ $\vec{E}$ a un rotationnel uniforme de direction $\vec{e_z}$. Cela signifie que les lignes de champ s'enroulent autour de $\vec{e_z}$ et donc que le champ est orthoradial. Les invariances par rotation autour de Oz et par translation selon Oz impliquent que la valeur algébrique orthoradiale du champ ne dépende que de r, ce qui implique :

$$\vec{E} = E_\theta(r,t)\, \vec{e_\theta}(\theta)$$

Remarque : un autre argument peut être entendu pour prouver cela. Tous plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie de la distribution des sources électromagnétiques (ici les courants). Il s'ensuit que tous les champs de vecteurs polaires (les « vrais » vecteurs comme $\vec{E}$ et $\vec{A}$) sont antisymétriques par rapport à une tel plan. Corollairement, tout point M de l'espace appartenant à un tel plan, le champ en M est orthogonal à ce plan, c'est-à-dire orthoradial.

3- Exprimer la circulation du champ $\vec{E}$ le long d'un parcours circulaire de rayon r $(r < R)$ d'axe Oz et orienté dans le sens direct. En déduire l'expression de $\vec{E}(r,t)$.

Nous appliquons le théorème de Stokes sur un tel parcours :

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = \iint_S \vec{\text{rot}}\,\vec{E}\cdot\vec{n_+}\, dS = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{e_z}\, dS$$

La composante E_θ de dépendant que de r, la circulation du champ électrique s'écrit simplement : $\oint_C \vec{E}\cdot\vec{d\ell} = E_\theta \oint_C \vec{e_\theta}\cdot\vec{d\ell} = E_\theta \oint_C d\ell = 2\pi r E_\theta$

D'autre part, le champ magnétique étant uniforme, le flux a une expression très simple : $\iint_S \vec{B}\cdot\vec{e_z}\, dS = \iint_S B_z\, dS = B_z dS \iint_S dS = \pi r^2 B_z = \pi r^2 \mu_0 n\, i_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$

Nous en déduisons l'expression du champ électrique : $2\pi r E_\theta = -\pi r^2 \mu_0 n\, i_0 \dfrac{d}{dt}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \dfrac{\pi r^2 \mu_0 n\, i_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

Et donc : $\vec{E}(r,t) = \dfrac{r\mu_0 n\, i_0}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\, \vec{e_\theta} = \dfrac{r\, B_z}{2\tau}\, \vec{e_\theta}$

4- Montrer que dans le cas présent d'un régime « lentement » variable, la densité volumique d'énergie électrique est négligeable devant la densité volumique d'énergie magnétique.

Nous avons $u_\mathrm{e} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^{\,2} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\dfrac{r\,B_z}{2\tau}\right)^2$ et $u_\mathrm{m} = \dfrac{\vec{B}^{\,2}}{2\mu_0} = \dfrac{B_z^2}{2\mu_0}$.

Par conséquent : $\dfrac{u_\mathrm{m}}{u_\mathrm{e}} = \dfrac{B_z^2}{2\mu_0} \times \dfrac{2}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{2\tau}{r\,B_z}\right)^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\left(\dfrac{2\tau}{r}\right)^2 = \left(\dfrac{2c\tau}{r}\right)^2$

$c\tau$ représente la distance parcourue par l'interaction électromagnétique dans le temps caractéristique de la variation du champ. Par définition, dans l'ARQS, cette distance est très grande par rapport à la plus grande des dimensions du circuit, c'est-à-dire ici par rapport à la longueur du solénoïde et donc *a fortiori* par rapport à *r*. Nous en déduisons donc que $u_\mathrm{e} \ll u_\mathrm{m}$.

5- Montrer que le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ est radial et déterminer son expression de la forme $\vec{\Pi}(r,\theta,t) = \Pi_r(r,t)\,\vec{e}_r(\theta)$.

Par définition : $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{r\,B_z}{2\tau\mu_0}\,\vec{e}_\theta \wedge B_z\vec{e}_z = \dfrac{r\,B_z^2}{2\mu_0\tau}\,\vec{e}_r = \dfrac{\mu_0 r\, n^2\, i_0^{\,2}\, e^{-\frac{2t}{\tau}}}{2\tau}\,\vec{e}_r$

Cette expression est bien de la forme attendue, avec $\Pi_r(r,t) = \dfrac{\mu_0\, n^2\, i_0^{\,2}}{2\tau}\, r\, e^{-\frac{2t}{\tau}}$

6- On démontre qu'en coordonnées cylindriques $\mathrm{div}\left(r\,\vec{e}_r\right) = 2$. Le théorème de Poynting est-il vérifié ?

Nous avons donc $\mathrm{div}\,\vec{\Pi} = \dfrac{\mu_0 n^2\, i_0^{\,2}}{2\tau}\,\mathrm{div}\left(r\,\vec{e}_r\right)\, e^{-\frac{2t}{\tau}} = \dfrac{\mu_0 n^2\, i_0^{\,2}}{\tau}\, e^{-\frac{2t}{\tau}}$

D'autre part, la densité volumique d'énergie électromagnétique étant principalement magnétique, soit $u_\mathrm{em} \simeq u_\mathrm{m} = \dfrac{B_z^2}{2\mu_0} = \dfrac{\mu_0 n^2\, i_0^{\,2}}{2}\, e^{-\frac{2t}{\tau}}$, nous avons donc : $\dfrac{\partial u_\mathrm{em}}{\partial t} \simeq \dfrac{du_\mathrm{m}}{dt} = -\dfrac{\mu_0 n^2\, i_0^{\,2}}{\tau}\, e^{-\frac{2t}{\tau}}$

Nous retrouvons bien la formule correspondant au théorème de Poynting en l'absence de courant :

$$\mathrm{div}\,\vec{\Pi} - \frac{\partial u_\mathrm{em}}{\partial t} = 0$$

7- Faire le bilan d'énergie pour un morceau de solénoïde de longueur ℓ entre l'instant 0 où le courant électrique a une valeur initiale i_0 et un temps « infini » au bout duquel le courant s'est annulé. Commenter ce bilan d'énergie.

À l'instant initial, l'énergie électromagnétique a pour valeur $\mathcal{E}_\mathrm{em}(0) \simeq \pi R^2 \ell\, u_\mathrm{m}(0) = \pi R^2 \ell\, \dfrac{\mu_0 n^2\, i_0^{\,2}}{2}$

Le flux instantané du vecteur de poynting sortant du volume du solénoïde a pour expression :

$$\oiint_S \vec{\Pi}\cdot\vec{n}_\mathrm{ext}\, dS = 2\pi R\ell \times \Pi_r(R,t) = \pi R^2 \ell\, \frac{\mu_0\, n^2\, i_0^{\,2}}{\tau}\, e^{-\frac{2t}{\tau}} = \mathcal{P}$$

Ce flux correspond à la puissance $\mathcal{P}$ rayonnée et en intégrant cette puissance entre $t = 0$ et l'infini, nous obtenons :

$$\int_0^\infty \mathcal{P}\, dt = \pi R^2 \ell\, \frac{\mu_0\, n^2\, i_0^{\,2}}{\tau} \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}\, dt = \pi R^2 \ell\, \frac{\mu_0\, n^2\, i_0^{\,2}}{\tau}\left[\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^\infty = \pi R^2 \ell\, \frac{\mu_0\, n^2\, i_0^{\,2}}{2} = \mathcal{E}_\mathrm{em}(0)$$

Toute l'énergie magnétique initialement présente sera rayonnée…