Onde électromagnétique dans le vide - corrigé

On considère un champ électrique d'une onde électromagnétique de la forme suivante :

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos\dfrac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz) \\ \alpha E_0 \sin\dfrac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz + \varphi) \end{array} \right.$$

1- À partir de l'équation de Maxwell-Gauss et de l'équation de propagation du champ, déterminer α, φ et k en fonction de ω, a et de la vitesse c_0 de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide.

Équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \ \forall\{x, y, z, t\}$

$$\operatorname{div}\vec{E} = -E_0 \sin\frac{\pi y}{a}\left(\frac{\pi}{a}\cos(\omega t - kz) - k\alpha \sin(\omega t - kz + \varphi)\right)$$

En posant $u = \omega t - kz$, la condition nécessaire $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ s'écrit donc $\dfrac{\pi}{a}\cos u = k\alpha \sin(u + \varphi)$

Deux fonctions harmoniques de la même variable ne peuvent égale quel que soit u que si elles ont même amplitude et même phase, soit : $\alpha = \dfrac{\pi}{ka}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. Le champ électrique s'écrit donc :

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos\dfrac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \dfrac{\pi}{ka} \sin\dfrac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz) \end{array} \right.$$

Remarque : Les valeurs $\alpha = -\dfrac{\pi}{ka}$ et $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$ correspondent à la même solution.

L'équation de propagation s'écrit : $\forall\{x, y, z, t\}$
$$\begin{cases} \Box E_x = 0 \\ \Box E_y = \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\ \Box E_z = \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Chacune des deux équations d'Alembertiennes donne la même condition :

$$\Box E_y = \left(-\frac{\pi^2}{a^2} - k^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) E_y = 0 \ \forall\{x, y, z, t\} \Rightarrow \frac{\omega^2}{c_0^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}$$
$$\Box E_z = \left(-k^2 - \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) E_z = 0 \ \forall\{x, y, z, t\} \Rightarrow \frac{\omega^2}{c_0^2} = k^2 + \frac{\pi^2}{a^2}$$

Cette relation $\omega^2 = k^2 c_0^2 + \dfrac{\pi^2 c_0^2}{a^2}$ s'appelle « relation de dispersion ». Elle impose une condition absolue sur la pulsation ω, il existe une pulsation de coupure ω_c. En posant $\omega_c = \pi c_0 / a$, cette condition s'écrit : $\omega > \omega_c$.

2- À partir de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à ce champ électrique dans cette onde électromagnétique et vérifier que ce champ satisfait bien aux autres équations de Maxwell qui le concernent.

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \forall \{x, y, z, t\}$$

Le champ d'induction magnétique n'a donc de composante non nulle que sur x et l'on obtient cette composante en intégrant par rapport au temps.

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{E_0}{k}\left(\frac{\pi^2}{a^2} + k^2 \right) \cos\frac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz) = -\frac{E_0 \omega^2}{k c_0^2} \cos\frac{\pi y}{a} \sin(\omega t - kz)$$

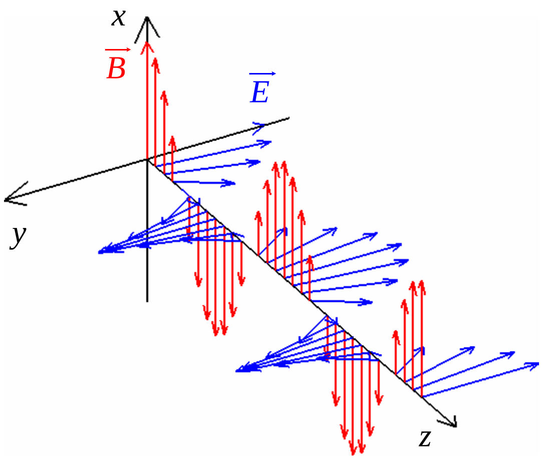
et donc $\vec{B} = \dfrac{E_0 \omega}{k c_0^2} \cos\dfrac{\pi y}{a} \cos(\omega t - kz)\, \vec{e}_x$

Il serait possible d'y ajouter une constante magnétostatique, mais seule nous intéresse ici le champ propagatif, fonction du temps.

3- Proposer une représentation spatiale de cette onde électromagnétique. Comment peut-on nommer une telle onde ?

Note : La représentation spatiale d'une telle onde ne pourrait en aucun cas être demandée en temps limité et sans outil informatique adéquat.

Le schéma ci-contre est obtenu à l'aide du logiciel de calcul formel *Maple*.



L'onde est harmonique et propagative selon z dans le sens $z > 0$, mais il ne s'agit pas d'une onde plane puisque l'amplitude des champs n'est pas identique en tout point d'un plan orthogonal à la direction de propagation. Le champ d'induction magnétique est transverse, mais ce n'est pas le cas pour le champ électrique pour lequel il existe une composante vibratoire longitudinale. Tout ceci est caractéristique d'une *onde guidée*.

Il existe des nœuds de vibration pour le champ d'induction magnétique pour les valeurs $y = \dfrac{a}{2} + na,\ n \in \mathbb{Z}$: l'onde présente un caractère de stationnarité dans la direction y.

Remarque : Nous rencontrons le même type d'onde dans le cas de la propagation guidée entre deux plans métalliques, mais alors c'est le champ électrique qui est transverse et le champ magnétique qui présente une composante longitudinale.

4- Déterminer le vecteur de Poynting de cette onde. Se produit-il une propagation d'énergie ?

Le vecteur de Poynting a pour expression $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$

Avec $\vec{E} = E_y \vec{e_y} + E_z \vec{e_z}$ et $\vec{B} = B_x \vec{e_x}$, cela donne : $\vec{\Pi} = \dfrac{E_z B_x}{\mu_0}\vec{e_y} - \dfrac{E_y B_x}{\mu_0}\vec{e_z}$

Soit : $\vec{\Pi} = \Pi_y \vec{e_y} + \Pi_z \vec{e_z}$ avec $\begin{cases} \Pi_y = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2 \omega}{k}\dfrac{\pi}{4ka}\sin\dfrac{2\pi y}{a}\sin(2\omega t - 2kz) & \textit{composante transversale} \\ \Pi_z = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2 \omega}{k}\left(\cos\dfrac{\pi y}{a}\cos(\omega t - kz)\right)^2 & \textit{composante longitudinale} \end{cases}$

La composante transversale Π_y est de valeur moyenne nulle dans le temps et ne correspond donc à aucun transfert d'énergie.

La composante longitudinale Π_z est de valeur moyenne positive : il lui est associé une propagation d'énergie électromagnétique dans la direction et le sens de la propagation.

$$\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \langle \Pi_z \rangle_t \vec{e_z} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \omega}{2k}\left(\cos\frac{\pi y}{a}\right)^2 \vec{e_z}$$

Cette propagation de fait à une vitesse égale à la vitesse de groupe v_g inférieure à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques planes dans le vide :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\sqrt{k^2 c_0^2 + \frac{\pi^2 c_0^2}{a^2}}\right) = \frac{c_0^2}{v_\varphi} = \frac{c_0^2 k}{\omega} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \dfrac{\pi^2}{a^2 k^2}}} < c_0$$