

I.A - Propagation d'une onde guidée

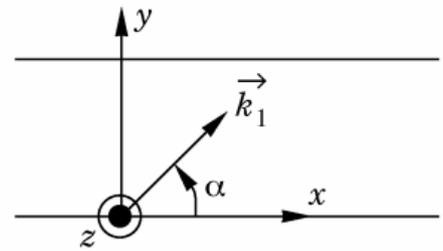
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le métal considéré dans cette partie est parfait.

I.A.1) On considère deux plans métalliques parfaits d'équations $y = 0$ et $y = b$. De façon à éviter des pertes par rayonnement on cherche à faire se propager selon la direction (Ox) une onde plane progressive, harmonique (monochromatique) de pulsation ω , polarisée rectilignement selon (Oz) . Montrer que ceci est impossible.

I.A.2) On choisit alors d'envoyer cette onde en oblique entre les deux plans selon le vecteur d'onde \vec{k}_1 faisant l'angle α ($\alpha \in]0, \pi/2[$) avec l'axe (Ox) .

Le champ électrique associé est noté

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM})} \vec{e}_z.$$



a) En utilisant notamment les lois de Descartes, déterminer l'expression du champ électrique \vec{E}_2 de l'onde plane réfléchi. Déterminer les valeurs possibles de $\sin \alpha$ en fonction d'un entier p , λ_0 (longueur d'onde dans le vide) et b .

b) Donner l'expression de la somme \vec{E} des champs incident et réfléchi. Justifier sans calcul pourquoi ce champ est bien solution des équations de Maxwell. Dans quelle direction et quel sens y a-t-il propagation? Déterminer en fonction de $k_0 = \omega/c$ et α le module du vecteur d'onde k_g dans le guide.

I.A.3)

a) Exprimer en fonction de c et b la fréquence minimale f_c en deçà de laquelle il ne peut y avoir de propagation. Quelle condition doit vérifier b pour qu'une onde de 2,5 GHz puisse se propager?

b) Trouver la relation entre k_0 et k_g . Comment appelle-t-on cette relation?

c) Trouver une relation entre la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g sans les calculer explicitement, puis donner leurs expressions en fonction de c , p et du rapport de la fréquence de l'onde sur f_c . Déterminer littéralement et numériquement la valeur de l'angle α pour lequel la vitesse de groupe est la plus grande (prendre $b = 6,6$ cm et $f = 2,5$ GHz). Quelle est la valeur de p associée?

I.A.4) On ferme le guide par deux autres plans parallèles en $z = 0$ et $z = a$. Montrer sans calculs que cela est possible sans changer les solutions précédentes. Sur quels plans apparaissent des charges surfaciques?

I.B - Du guide d'onde à la cavité

On ferme le guide d'onde par deux plans infiniment conducteurs en $x = 0$ et $x = l$. On obtient une cavité électromagnétique.

I.B.1) On considère le champ \vec{E} de la question I.A.2-b) que l'on note

$$\vec{E}_i = E_0(y) e^{i(\omega t - k_g x)} \vec{e}_z$$

et que l'on peut considérer comme un champ incident sur le plan $x = l$. Expliquer sans calcul pourquoi il existe un champ réfléchi. Montrer que si on suppose un champ réfléchi de la forme

$$\vec{E}_0 = K E_0(y) e^{i(\omega t + k_g x)} \vec{e}_z,$$

seul champ à coexister avec \vec{E}_i , alors les équations de Maxwell peuvent être vérifiées. Déterminer K et montrer qu'il existe une condition de quantification sur k_g .

I.B.2) En déduire que les pulsations possibles dans le cadre des hypothèses effectuées sont de la forme :

$$\omega = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{l}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2} \quad \text{où } m \text{ et } p \text{ sont des entiers.}$$

I.B.3)

a) Montrer que le champ électrique peut se mettre sous la forme

$$\vec{E} = E_c \sin(p\pi y/b) \sin(m\pi x/l) e^{i\omega t} \vec{e}_z \quad \text{avec } E_c \text{ réel.}$$

On se place dans la suite dans le cas où $m = p = 1$. Quelles sont les parois de la cavité susceptibles de porter une densité surfacique de charge non nulle ? Dessiner un schéma de la cavité en indiquant avec les signes + et - les charges relatives de ces faces en espaçant d'autant plus ces signes que la densité surfacique est faible en valeur absolue (préciser les axes Ox , Oy et Oz).

b) Donner l'expression du champ magnétique \vec{B} en fonction notamment de E_c , x et y , puis préciser les faces de la cavité où apparaissent des courants surfaciques.

c) Calculer $W_e(t)$ et $W_m(t)$ les énergies électriques et magnétiques instantanées dans la cavité en fonction de $W_0 = \epsilon_0 E_c^2 V/8$ (V étant le volume de la cavité). Représenter sur un même graphe les évolutions temporelles de W_e et W_m . Que vaut l'énergie électromagnétique totale W ? Commenter. Trouver une analogie avec un circuit électrocinétique simple.