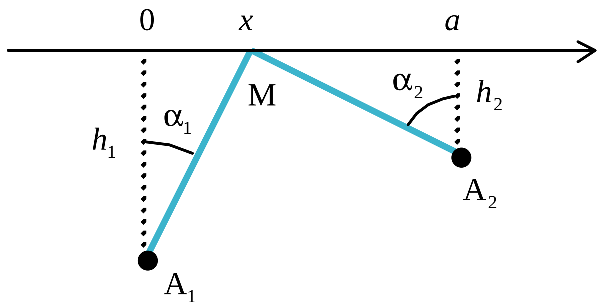
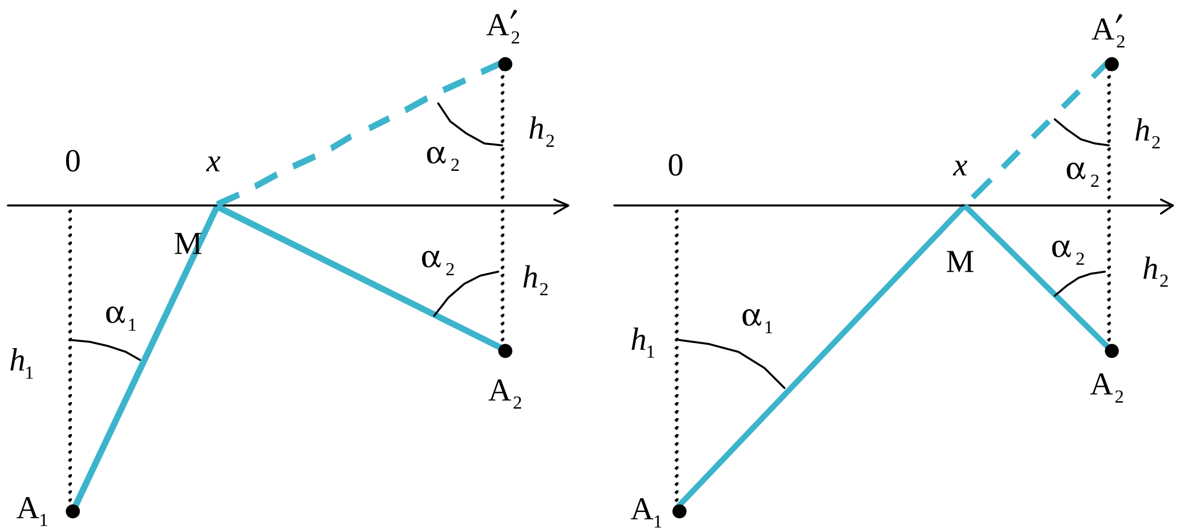
Le chemin le plus rapide n'est pas toujours le plus court-corrigé

1. Voici un jeu d'enfant : deux points de base A_1 et A_2 sont situés respectivement aux distances h_1 et h_2 d'un mur. Partant de A_1, il s'agit de rejoindre A_2 au plus vite en ayant pour contrainte d'aller toucher le mur. On suppose que la vitesse de course est identique sur toute la surface du terrain de jeu.



Déterminer la position du point M correspondant au trajet le plus rapide.

Que peut-on dire alors des angles d'incidence α_1 et α_2 ? (On appelle angle d'incidence l'angle de la normale au mur avec le trajet).



La vitesse étant identique sur toute la surface du terrain, le trajet le plus rapide se trouve être le plus court. Si l'on considère le point A_2' symétrique de A_2 par rapport au mur, le parcours $A_1M + MA_2'$ a même longueur que le parcours $A_1M + MA_2$. Cette longueur est minimale lorsque les points A_1, M et A_2' sont alignés.

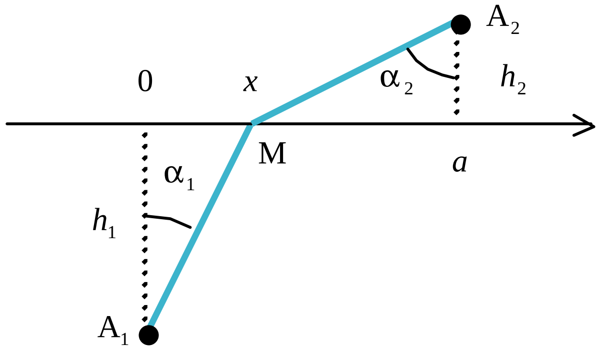
Le point M divise alors le segment de longueur a dans le rapport d'homothétie $h_1/(h_1+h_2)$, ce qui s'écrit :

$$x = a\frac{h_1}{h_1+h_2}$$

Lorsque cette condition est réalisée, les angles d'incidence α_1 et α_2 sont identiques (angles alternes-internes).

2. Voici un jeu d'enfant plus compliqué : il n'y a plus de mur, mais un rivage rectiligne. La base A_1 est située sur la plage, tandis que la base A_2 est située sur la mer. les enfants se déplacent à des vitesses v_1 et v_2 différentes respectivement en courant sur le sable et en nageant dans l'eau.

   Déterminer, en fonction de l'abscisse x du point M auquel l'enfant choisit de pénétrer dans l'eau, la durée Δt du déplacement de A_1 vers A_2.



   Exprimer la condition pour que cette durée soit extrémale (on ne cherchera pas à calculer la valeur de x correspondante). Quelle relation est alors satisfaite entre les angles d'incidence α_1 et α_2 ?

   La durée Δt du parcours A_1MA_2 est fonction de l'abscisse x du point M et a pour expression :

$$\Delta t(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}$$

   En écrivant la nullité de la dérivée de cette expression par rapport à x, nous exprimons que cette durée est extrémale :

$$\frac{d\Delta t(x)}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2}\frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}} = 0$$

   Cette condition s'écrit simplement en fonction des angles d'incidence α_1 et α_2 :

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

Note : En optique géométrique, nous définirons l'indice n d'un milieu transparent homogène comme étant inversement proportionnel à la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu. Cette loi prend alors la forme $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$ et elle définit les conditions de réfraction de la lumière lors d'un changement de milieu.

   Pour démontrer que cet extremum est un minimum, nous pouvons calculer la dérivée seconde de la fonction $\Delta t(x)$ et constater qu'elle est toujours positive.

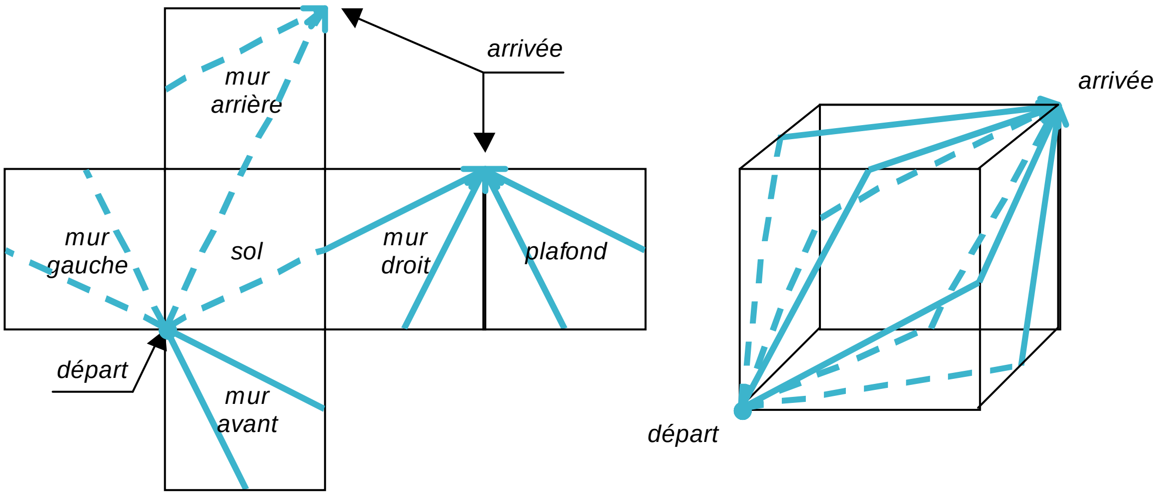
$$\frac{d^2\Delta t(x)}{dx^2} = \frac{1}{v_1}\frac{h_1^2}{\left(h_1^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2}\frac{h_2^2}{\left(h_2^2 + (a-x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

3. Même problème dans l'espace : une araignée se trouve en un coin inférieur d'une pièce cubique. Elle doit se rendre au plus vite au coin supérieur opposé de la pièce. Quel chemin doit-elle prendre dans l'hypothèse où elle se déplace à la même vitesse au sol, au plafond et sur les murs verticaux ?

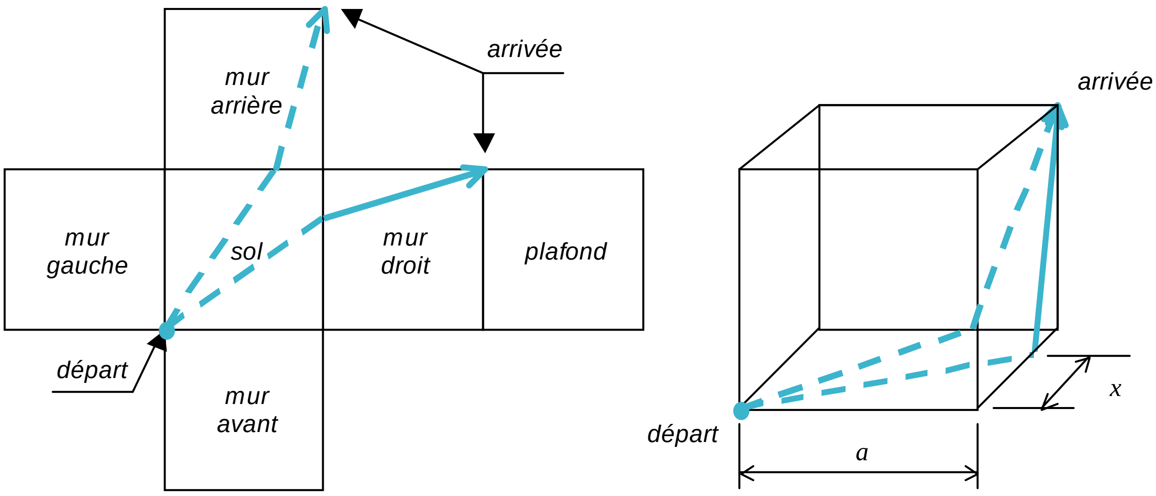
   Quel chemin doit-elle prendre dans l'hypothèse où elle se déplace deux fois plus vite au sol que sur les murs et le plafond ?

Il ne s'agit pas ici d'un vrai problème de dimension trois, puisque l'araignée est astreinte à se déplacer sur des surfaces planes. Nous pouvons représenter le sol, les murs et le plafond de la pièce sous une forme développée à plat.

Dans l'hypothèse où l'araignée se déplace à la même vitesse sur toutes les surfaces, il existe six chemins tous de même longueur $l_{\min} = a\sqrt{5}$ permettant de joindre les deux coins opposés de la pièce dans un temps minimal.



Dans l'hypothèse où l'araignée se déplace plus vite sur le sol, elle devra, pour aller au plus vite, emprunter l'un des deux chemins comprenant un segment de route sur le sol, en respectant la loi de la « réfraction ».



Nous avons alors : $$\Delta t(x) = \frac{1}{v_{\text{sol}}}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{1}{v_{\text{mur}}}\sqrt{a^2 + (a-x)^2}$$

En posant $X = \dfrac{x}{a}$ et $v_{\text{mur}} = \dfrac{v_{\text{sol}}}{2}$, la condition $\dfrac{d\Delta t(X)}{dX} = 0$ s'écrit :

$$\frac{X}{\sqrt{1+X^2}} - 2\frac{1-X}{\sqrt{1+(1-X)^2}} = 0$$

Cela nous conduit à une équation algébrique du quatrième degré dont il n'existe qu'une seule solution comprise entre 0 et 1 :

$$\left.\begin{array}{c} 3X^4 - 6X^3 + 6X^2 - 8X + 4 = 0 \\ 0 < X < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad X = 0{,}700..$$