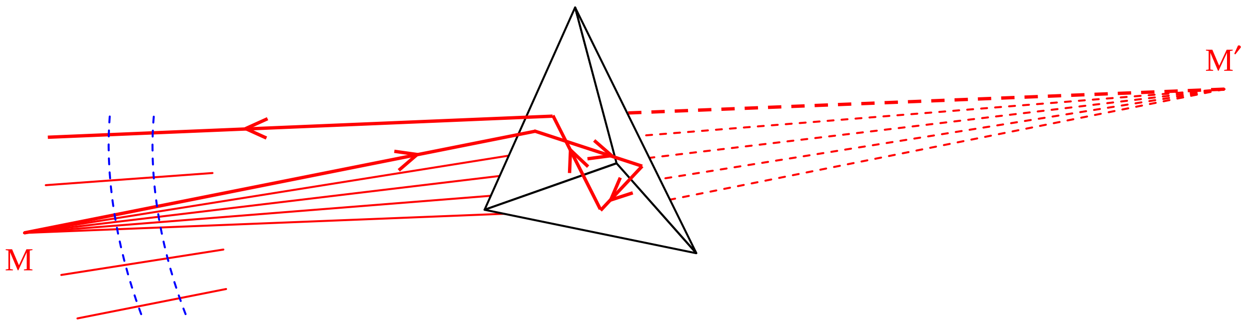
Optique. Mesure de la distance Terre-Lune - corrigé

1.a) Montrer que l'image d'un point M est le point symétrique M' de M par rapport à I.

L'image de $M(x,\ y,\ z)$ dans le miroir A est $M_A(-x,\ y,\ z)$, l'image de $M_A(-x,\ y,\ z)$ dans le miroir B est $M_{AB}(-x,\ -y,\ z)$ et enfin l'image de $M_{AB}(-x,\ -y,\ z)$ dans le miroir C est $M'(-x,\ -y,\ -z)$, symétrique de $M(x,\ y,\ z)$ par rapport à I. L'ordre dans lequel on envisage les images intermédiaires n'a évidemment pas d'importance.

1.b) En déduire qu'un rayon lumineux émis de la Terre et arrivant sur un coin de cube est renvoyé dans la direction exactement opposée.

Dire que M' est l'image de M suivant la triple réflexion, cela revient à dire qu'un faisceau spatialement cohérent divergent depuis le point M est transformé en un faisceau semblant diverger depuis le point M'. Étant donnée la très grande valeur de la distance Terre-Lune par rapport aux dimensions du coin de cube, nous pouvons considérer que le faisceau incident est un faisceau cylindrique et que les sphères de phase sont des plans de phase : tous les rayons réfléchis sur le coin de cube arrivent en phase à leur point d'émission et ce résultat est indépendant de l'orientation du coin de cube.



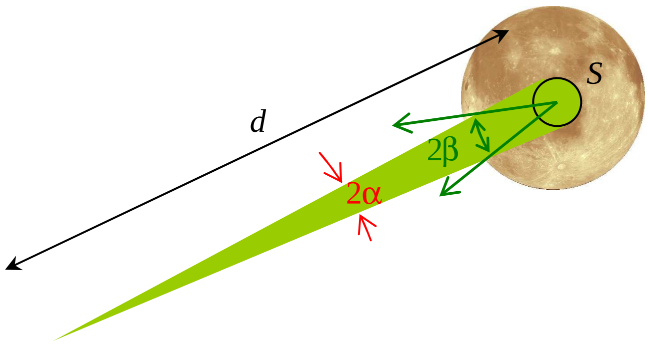
2.a) Ordre de grandeur de la fraction de puissance émise depuis la Terre et recueillie à son retour.

Remarque préalable : la valeur annoncée de la divergence du faisceau émis (cône de demi-angle au sommet $\alpha = 2\times10^{-5}$ rad) implique un diamètre δ du faisceau LASER à l'émission de l'ordre de grandeur de $\delta \approx \dfrac{\lambda}{\alpha} = \dfrac{0,53\times10^{-6}}{2\times10^{-5}} \approx 0,026 \text{ m} = 26 \text{ mm}$.

La surface S de la trace du faisceau LASER sur la Lune est de l'ordre de grandeur de $S = \pi(\alpha d)^2$.

Chaque coin de cube de surface σ en reçoit donc une fraction $\dfrac{\sigma}{\pi\alpha^2 d^2}$.

Dans l'hypothèse où il n'y a pas de pertes à la réflexion, cette puissance reçue par le coin de cube est réémise à 100% en direction de la Terre.



Cette réémission se fait dans un faisceau conique dont le demi-angle au sommet β est, selon les lois de la diffraction, de l'ordre de grandeur de $\beta = \dfrac{\lambda}{\sqrt{\sigma}}$ où $\sqrt{\sigma}$ est l'ordre de grandeur de largeur du faisceau à l'émission. Ce faisceau divergent se projette sur la Terre selon une surface $S' = \pi(\beta d)^2$ et le télescope, de surface σ' est intercepte une fraction $\dfrac{\sigma'}{S'} = \dfrac{\sigma\sigma'}{\pi\lambda^2 d^2}$.

La fraction de la puissance émise interceptée par le télescope est donc infime et a par valeur :

$$x = \frac{\sigma}{S} \times \frac{\sigma'}{S'} = \frac{\sigma^2\sigma'}{\pi^2\alpha^2\lambda^2 d^4} = \frac{\left(10^{-4}\right)^2 \times 1{,}8}{\pi^2 \times \left(2\times10^{-5}\right)^2 \times \left(0{,}53\times10^{-6}\right)^2 \times \left(3{,}84\times10^{8}\right)^4} \approx 8\times10^{-22}$$

2.b) Décompte les photons :

L'énergie d'un photon étant égale à $\varepsilon = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$, chaque impulsion d'énergie $W = 0{,}3$ J correspond à l'émission d'un nombre de photon égal à :

$$N = \frac{\lambda W}{hc} = \frac{0{,}53\times10^{-6}\times0{,}3}{6{,}62\times10^{-34}\times3\times10^{8}} = 8\times10^{17} \text{ photons/impulsion}$$

Pour chaque réflecteur, il ne revient statistiquement que $xN \approx 8\times10^{-22}\times8\times10^{17} \approx 6\times10^{-4}$ photon. Pour cent coins de cube déposés sur la lune, le nombre moyen $\langle n\rangle$ d'impulsion LASER nécessaires pour détecter un photon en retour est donc : $\langle n\rangle = \dfrac{1}{100xN} \approx 16$.

3) Comment sont reliés τ et d' ?

En négligeant l'effet de l'atmosphère terrestre (la lumière se propage un peu moins vite dans l'air que dans le vide…), la valeur approximative de τ est donc égale à $\dfrac{d'}{c} \approx \dfrac{2d}{c} = \dfrac{2\times3{,}84\times10^{5}}{3\times10^{8}} \approx 2{,}6$ s

τ et d' étant proportionnels, nous aurons une précision de mesure de l'ordre de grandeur de :

$$\frac{\Delta d'}{d'} = \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{50\times10^{-12}}{2{,}6} \approx 2\times10^{-11}$$

Remarque : cela correspond à une incertitude absolue sur la distance de la Terre à la Lune de l'ordre de grandeur de $4\times10^{8}\times2\times10^{-12} \approx 10^{-3}$ m. Il faut bien alors considérer que l'on mesure la distance d'un point de la surface de la Terre à un point de la surface de la Lune, au millimètre près !