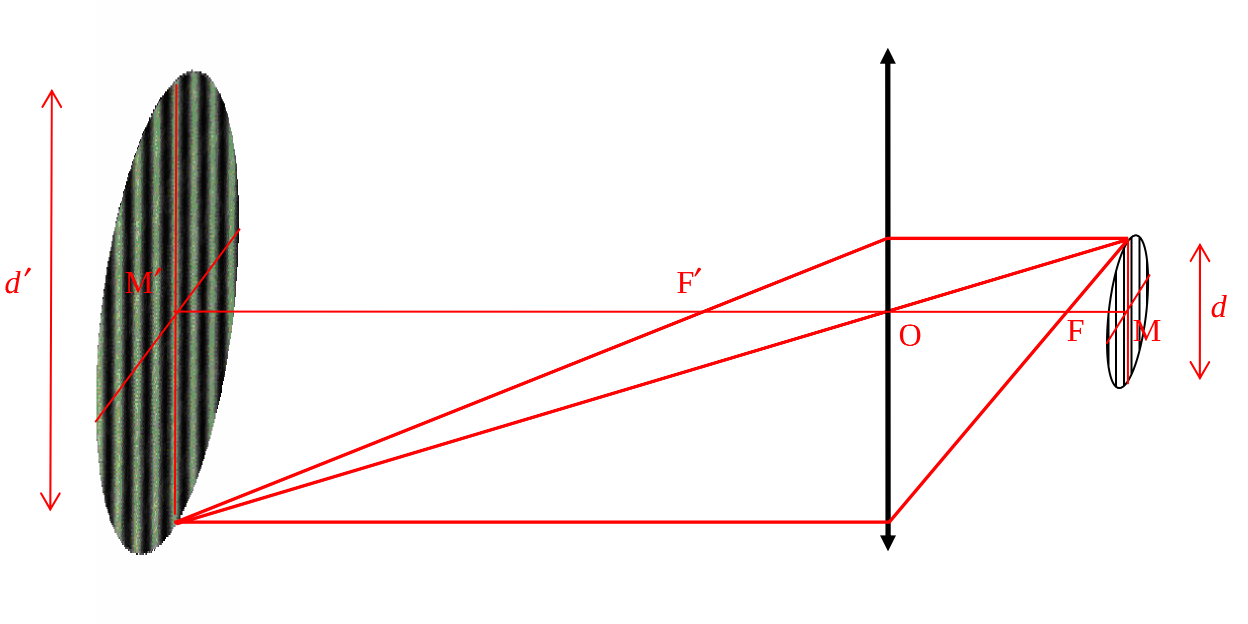
Optique. Interféromètre de Michelson, corrigé

1. Disposition de la lentille permettant l'observation d'une figure d'interférences aux contours bien nets.

   Dans ce réglage de l'interféromètre, les interférences sont virtuelles et localisées sur les miroirs. Pour les observer sur un écran, il faut donc faire l'image des miroirs sur l'écran : les bords bien nets correspondent à la mise au point sur le contour du miroir.

   Le grandissement a pour valeur $\gamma = -\frac{d'}{d} = -\frac{62}{20} = -3{,}1 = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{F'M'}}{\overline{F'O}} = -\frac{\overline{OM'} - \overline{OF'}}{\overline{OF'}}$.



   Nous en déduisons la distance $\overline{OM'}$ de la lentille à l'écran ainsi que la distance $\overline{MO}$ du miroir à la lentille :

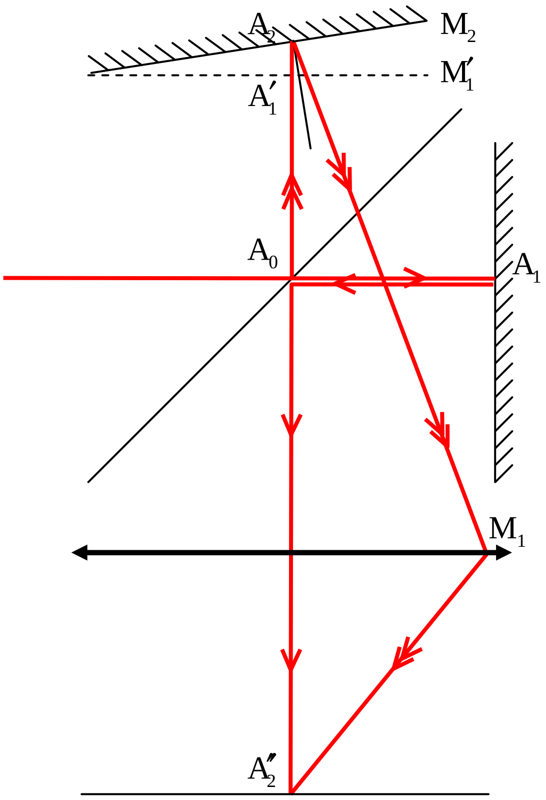
   $$\overline{OM'} = (1-\gamma)\overline{OF'} = (1-\gamma) f_1' = 0{,}82 \text{ cm}$$

   $$\overline{MO} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\overline{OF'} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) f_1' = 0{,}26 \text{ cm}$$

2. Représenter le cheminement d'un rayon.

   Noter que les points A_2 (point d'impact du rayon 2 sur le miroir M_2) et A_2'' (point de convergence sur l'écran) sont conjugués optiques par rapport à la lentille, ce qui signifie que les chemins optiques (A_2A_2'') sont indépendants du rayon joignant A_2 à A_2''. En particulier, on peut tout aussi bien compter ce chemin optique sur l'axe optique de la lentille. Si l'on nomme A_1' l'image de A_1 (point d'impact du rayon 1 sur le miroir M_1) dans le dispositif séparateur du front d'amplitude, la différence de marche s'exprime ainsi :

   $$\delta = \left[(A_0A_2) + (A_2A_2'')\right] - \left[(A_0A_1) + (A_1A_0) + (A_0A_2'')\right]$$



soit $\delta = \left[A_0A_2 + \left(A_2A_2''\right)\right] - \left[2\,A_0A_1 - A_0A_2 + \left(A_2A_2''\right)\right] = 2\left[A_0A_2 - A_0A_1\right] = 2\,A_1'A_2$

La différence de marche s'identifie au double de l'épaisseur du coin d'air à l'endroit de l'impact du rayon lumineux.

3. Quelle est la valeur de l'angle α que fait le miroir M_1 avec l'image M_2' de l'autre miroir dans la séparatrice ?

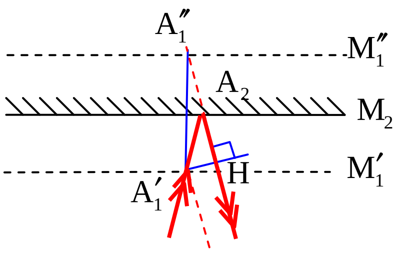
Si *x* est la distance du point d'impact du rayon lumineux à l'arête du dièdre formé par le miroir M_2 et l'image M_1' du miroir M_1 dans le dispositif séparateur, la différence de marche a pour valeur $\delta = 2\alpha x$. L'interfrange sur le miroir correspond à une variation de la différence de marche égale à une longueur d'onde $\lambda = 2\alpha i_M$. L'interfrange sur l'écran étant multiplié par la valeur absolue du grandissement, nous en déduisons :

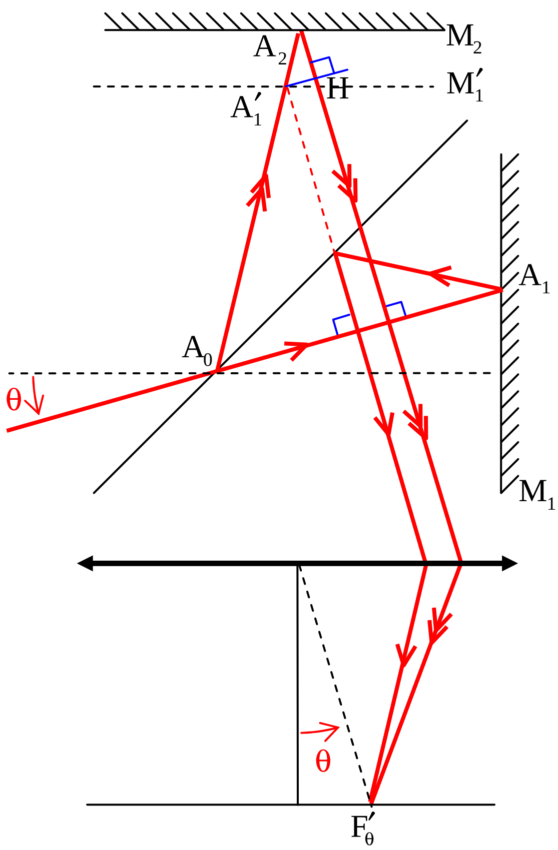
$$\alpha = \frac{\lambda}{2\,i_M} = \frac{\lambda}{2\,i_E}\frac{d'}{d}$$

Application numérique : $\alpha = \dfrac{\lambda}{2\,i_M} = \dfrac{546\times10^{-9}}{2\times8,5\times10^{-3}}\times3,1 = 1,0\times10^{-4}\ \text{rad} = 0,0057\,° = 0,34'$

4. Représenter le cheminement d'un rayon incliné d'un angle θ.

Les rayons émergent avec la même inclinaison θ et, remarquons-le, perpendiculaires au rayon initial de direction A_0A_1. Les interférences sont donc réalisées en F_θ', foyer secondaire d'inclinaison θ de la lentille. En introduisant A_1', symétrique de A_1 dans le dispositif séparateur, les chemin optiques $\left(A_1'F_\theta'\right)$ et $\left(HF_\theta'\right)$ sont identiques. La différence de marche s'observe donc comme la longueur des segments $\delta = A_1'A_2 + A_2H$.





En représentant A_1'', image de A_1' dans le miroir M_2, la différence de marche se lit comme la longueur du segment $\delta = A_1''H = 2e\cos\theta$, en notant *e* l'épaisseur de la lame d'air équivalente.

5. Mesurer les diamètres $2r_k$ des différents anneaux brillants. En déduire la valeur de l'épaisseur de la lame d'air dans ce réglage de l'interféromètre et évaluer une incertitude de cette mesure.

Neuf mesures sont peuvent être faites avec une incertitude de l'ordre du demi millimètre.

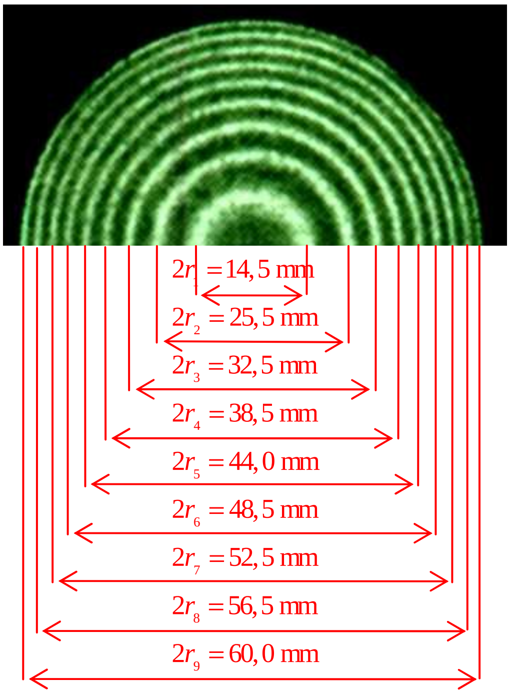
Pour chaque mesure, nous pouvons calculer, à l'aide d'un tableur, l'angle $\theta_k = \text{atan}\dfrac{2r_k}{2f_2'} \approx \dfrac{2r_k}{2f_2'}$.

La différence de marche étant égale à $2e\cos\theta_k$, chaque couple de mesures (θ_i, θ_j) permet une évaluation de l'épaisseur *e*, en effet la variation de différence de marche entre l'anneau de rang *i* et l'anneau de rang *j* a pour valeur $(j-i)\lambda = 2e(\cos\theta_i - \cos\theta_j) \approx e(\theta_j^2 - \theta_i^2)$.
Nous en déduisons :

$$e = \frac{\lambda}{2}\frac{j-i}{\cos\theta_i - \cos\theta_j} \approx 4f_2'^2\frac{j-i}{(2r_j)^2 - (2r_i)^2}\lambda$$

Les incertitudes absolues sur les mesures de diamètres étant *a priori* toutes identiques, nous pouvons écrire :

$$\Delta e = \left|\frac{\partial e}{\partial r_j}\right|\Delta r_j + \left|\frac{\partial e}{\partial r_i}\right|\Delta r_i = \left(\left|\frac{\partial e}{\partial r_j}\right| + \left|\frac{\partial e}{\partial r_i}\right|\right)\Delta r$$



Nous en déduisons l'expression de la précision sur la mesure de l'épaisseur *e* : $\dfrac{\Delta e}{e} = \dfrac{\Delta r}{2r_j - 2r_i}$

Cette précision est d'autant meilleure que l'on se réfère à des valeurs des valeurs de *i* et *j* plus écartées.

Il vaut mieux exclure le dernier anneau qui semble sortir partiellement du champ lumineux et se référer à l'anneau brillant de rang 8. Le tableau suivant donne les valeurs e_{8k} pour $k = 1$ à 4 avec les incertitudes correspondantes (pour les valeurs 5, 6 et7 l'incertitude est trop grande) :

$$\begin{aligned} k &= 1 \qquad e = (5{,}13 \pm 0{,}03)\ \text{mm} \\ k &= 2 \qquad e = (5{,}16 \pm 0{,}04)\ \text{mm} \\ k &= 3 \qquad e = (5{,}12 \pm 0{,}05)\ \text{mm} \\ k &= 4 \qquad e = (5{,}11 \pm 0{,}07)\ \text{mm} \end{aligned}$$

Toutes ces valeurs sont compatibles avec la valeur obtenue en rapprochant l'anneau brillant de rang 1 et l'anneau brillant de rang 8. Nous pouvons donc conclure :

$$e = (5{,}13 \pm 0{,}03)\ \text{mm}$$

6. Déterminer la partie fractionnaire de l'ordre au centre. Montrer qu'il est totalement impossible de prétendre mesurer de cette façon la partie entière de l'ordre au centre.

L'ordre au centre a pour valeur $p_0 = \dfrac{2e}{\lambda} = 18791 \pm 112$. Ce nombre est déterminé avec une précision de l'ordre de $0{,}6\,\%$, ce qui est déjà remarquable, mais il est exclus de pouvoir le déterminer à une unité près ! Toutefois, nous pouvons écrire que l'ordre du premier anneau brillant correspond à l'ordre entier immédiatement inférieur à l'ordre au centre, c'est-à-dire à la partie entière $\text{E}(p_0)$ et, plus généralement que l'ordre du k^e anneau brillant est égal à $E(p_0) - k + 1$:

$$p_k = \text{E}(p_0) - k + 1 = p_0\cos\theta_k \approx p_0\left(1 - \frac{\theta_k^2}{2}\right) \qquad \text{soit} \qquad \text{frac}(p_0) = p_0 - \text{E}(p_0) \approx p_0\frac{\theta_k^2}{2} - k + 1$$

En considérant les huit premiers anneaux brillants, nous obtenons ainsi une valeur de la partie fractionnaire de l'ordre au centre égale à 0,50 avec un écart type de 0,03.

Remarque : le centre étant bien sombre, nous savions *a priori* que cette valeur devait être proche d'une valeur demi-entière.

7. Lorsqu'on augmente encore la différence de marche, la visibilité des anneaux décroît progressivement. Lorsque la différence de marche est doublée par rapport au réglage initial, on ne peut plus observer d'interférences : l'éclairement de l'écran est uniforme. Calculer l'ordre de grandeur de la largeur spectrale $\Delta\lambda$ de la raie.

   En doublant la différence de marche, on atteint l'ordre de grandeur de la longueur de cohérence $\ell \approx 20\ \text{mm}$ de la raie verte du mercure, telle que : $\dfrac{\lambda}{\ell} = \dfrac{\Delta\nu}{\nu} = \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}$

   Nous en déduisons : $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda^2}{\ell} = \dfrac{\left(0,55\times10^{-6}\right)^2}{4\times5,1\times10^{-3}} = 15\ \text{pm}$