Poussée d'Archimède

I- Équilibre d'une sphère solide flottant sur un liquide

La sphère flotte sur le liquide et on désigne par x la partie du diamètre vertical immergé.

1. On pose $\alpha = \dfrac{\rho_S}{\rho_L}$. Quelle sont les valeurs de α correspondant à l'immersion totale ? $\alpha > 1$

   Quelle est la valeur de α correspondant à une demi-immersion ? $\alpha = \dfrac{1}{2}$

2. Exprimer en fonction de x le volume de la portion de sphère immergée.

   La tranche de sphère de cote x et d'épaisseur dx a pour volume $dV = \pi r^2 dx$ avec $r^2 = x(2R - x)$, nous en déduisons :

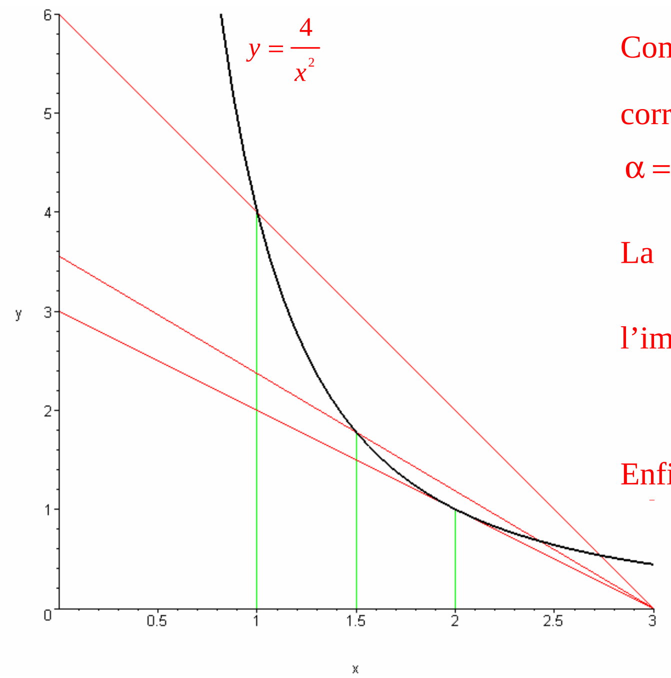
$$V(x) = \int_0^x \pi x'(2R - x')\,dx' = \pi\left[Rx'^2 - \frac{x'^3}{3}\right]_0^x = \pi\left(Rx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$

3. Montrer que l'équilibre de la sphère se traduit par une relation du type : $b - x = c / x^2$. Donner les expressions de b et c en fonction des paramètres du problème R et α.

   Selon le théorème d'Archimède, la relation d'équilibre de la sphère s'écrit :

$$V(x)\rho_L g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_S g \qquad \text{soit} \qquad 3R - x = \frac{4R^3\alpha}{x^2} \qquad \Rightarrow \begin{cases} b = 3R \\ a = 4R^3\alpha \end{cases}$$

4. Donner une solution graphique de l'équation (1) pour les trois valeurs de α suivantes : $\alpha = 1$; $\alpha = \dfrac{27}{32} \simeq 0,84$ et $\alpha = 0,5$. Commenter les résultats obtenus.



$\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \alpha = \dfrac{27}{32}$ $\qquad \alpha = 1$

Commentaire : on remarque bien que la valeur $\alpha = \dfrac{1}{2}$ correspond à la demi-immersion $(x = R)$ et la valeur $\alpha = 1$ à l'immersion totale $(x = 2R)$.

La valeur intermédiaire $\alpha = \dfrac{27}{32}$ correspond à l'immersion aux 3/4 de la hauteur $\left(x = \dfrac{3}{2}R\right)$.

Enfin, pour $\alpha > 1$, l'équation n'admet plus de

II- Déplacement d'une sphère au sein d'un liquide

La sphère est maintenant lestée de telle sorte que $\alpha > 1$. On la maintient totalement immergée près de la surface du liquide et on l'abandonne sans vitesse. On admet que l'action du liquide sur la sphère se traduit, en plus de la force d'Archimède, par une force de résistance opposée à la vitesse, de la forme :

$$\vec{f} = -k\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad k = 4 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

5. Décrire le mouvement de chute de la sphère en exprimant la vitesse v en fonction du temps.

$\sum \vec{f} = -k\vec{v} + m\vec{g} + \vec{F_A} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ soit, en projetant sur la verticale orientée de bas en haut :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3k}{4\pi R^3 \rho_S} v = g\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)$$

ou encore $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v}{\tau} = g\left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right)$ en posant $\tau = \dfrac{4\pi R^3 \rho_S}{3k} = \dfrac{m}{k}$

La solution générale de cette équation différentielle est de la forme $v(t) = g\tau\left(\dfrac{1}{\alpha} - 1\right) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

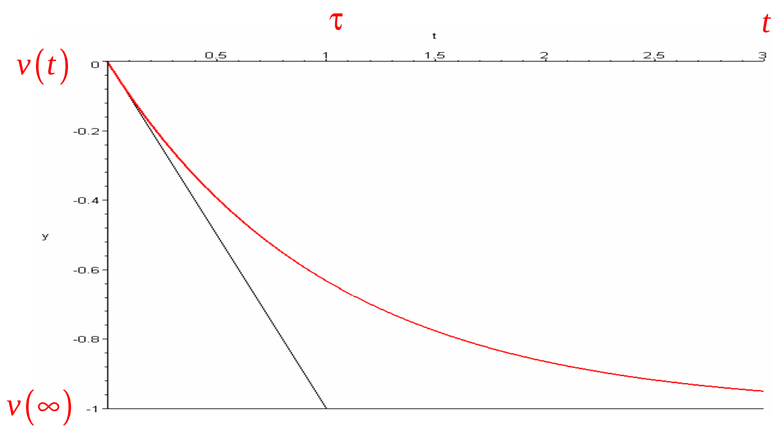
Pour notre problème, la constante A doit être choisie de telle sorte que $v(0) = 0$, soit :

$$v(t) = -g\tau\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Le mouvement s'accélère et la vitesse de la sphère tend vers une limite finie :

$$v(\infty) = -g\frac{4\pi R^3 \rho_L}{3k}(\alpha - 1) < 0$$

6. Donner l'allure du graphe représentant les variations de v en fonction du temps.



7. Calculer la vitesse limite atteinte pour $R = 2$ cm ; $\alpha = 1{,}5$; $\rho_L = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $g = 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Application numérique : $v(\infty) = -4{,}1 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$

8. $1 - \alpha' = \alpha - 1$, soit $\alpha' = 2 - \alpha = 0{,}5$.

III- Traversée de la surface de séparation air-liquide

On néglige la viscosité de l'eau et la résistance de l'air. On considère la sphère maintenue entièrement immergée, sa partie supérieure étant tangente à la surface libre du liquide. On libère la sphère.

9. Quelle est la valeur limite de α permettant à la sphère de sortir entièrement du liquide ?

   Si l'on considère la sphère tout juste sortie du liquide et immobile, elle s'est élevée d'une hauteur $2R$ tandis que le liquide qui a comblé le vide est descendu d'une hauteur R. Ces deux situations correspondent à la même énergie mécanique si et seulement si $\alpha = 1/2$.

10. Calculer v_0, vitesse de la sphère quand celle-ci est entièrement hors du liquide, sa partie inférieure étant tangente à la surface de séparation liquide/air. Calculer h_1, hauteur maximale atteinte.

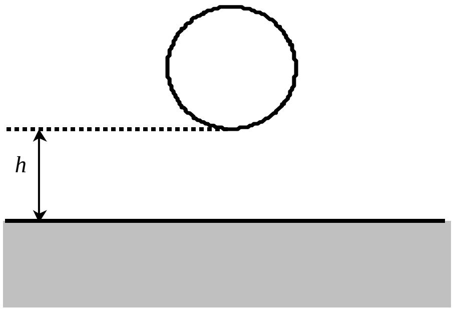
$$\frac{1}{2}m_S v_0^2 = -2m_S gR + m_L gR \qquad \text{soit} \qquad v_0 = \sqrt{2gR\left(\frac{1}{\alpha}-2\right)}$$

$$0 = -m_S g\left(2R+h_1\right) + m_L gR \qquad \text{soit} \qquad h_1 = R\left(\frac{1}{\alpha}-2\right)$$

11. Application numérique : sphère en polystyrène $(\alpha = 0,04)$ de rayon $R = 2\ \text{cm}$.

   $v_0 = 3,00\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $h_1 = 0,46\ \text{m}$.

12. On place la sphère à une hauteur h au dessus du liquide et on lâche celle-ci sans vitesse.



   Quelle est la hauteur minimale h_2 qui permet à la sphère d'être entièrement immergée ? Faire l'application numérique avec les valeurs de la question précédente et commenter ce résultat.

   Sans dissipation d'énergie, cette dernière expérience correspond exactement à la précédente pourvu que l'on inverse la flèche du temps : nous avons donc $h_2 = h_1 = 0,46\ \text{m}$.

   Ce résultat est peu crédible. Dans une situation réelle, les effets dissipatifs des forces de frottement fluide, aussi bien dans l'air que dans le liquide, sont tels qu'une boule de polystyrène lâchée de quelque hauteur que ce soit ne pénètre jamais entièrement dans le liquide.

4- Étude énergétique

13. On repère la position de la sphère par la cote z de son point le plus bas, l'origine étant prise au niveau de l'eau. Déterminer la fonction énergie potentielle de la sphère lorsqu'elle est totalement hors de l'eau.

$$E_p = -\int\left(-m_S g\right)dz = m_S gz + C^{te} = m_S gz = \alpha m_L gz$$

La constante est nulle de telle sorte dès lors que l'on prend pour origine des énergies potentielles E_p la situation où la sphère est totalement hors de l'eau, sa partie inférieure étant tangente à la surface libre du liquide.

14. Même question lorsque la sphère est partiellement immergée.

Lorsque la sphère est partiellement immergée, elle est soumise à son poids et à la force d'Archimède, les deux forces dérivant chacune d'une énergie potentielle :

$$E_\mathrm{p} = -\int\left(-m_\mathrm{S}g + \frac{1}{\alpha}m_\mathrm{S}\left(\frac{3z^2}{4R^2}+\frac{z^3}{4R^3}\right)g\right)dz = m_\mathrm{L}\left(\alpha z - \frac{z^3}{4R^2} - \frac{z^4}{16R^3}\right)g$$

15. Même question lorsque la sphère est totalement immergée.

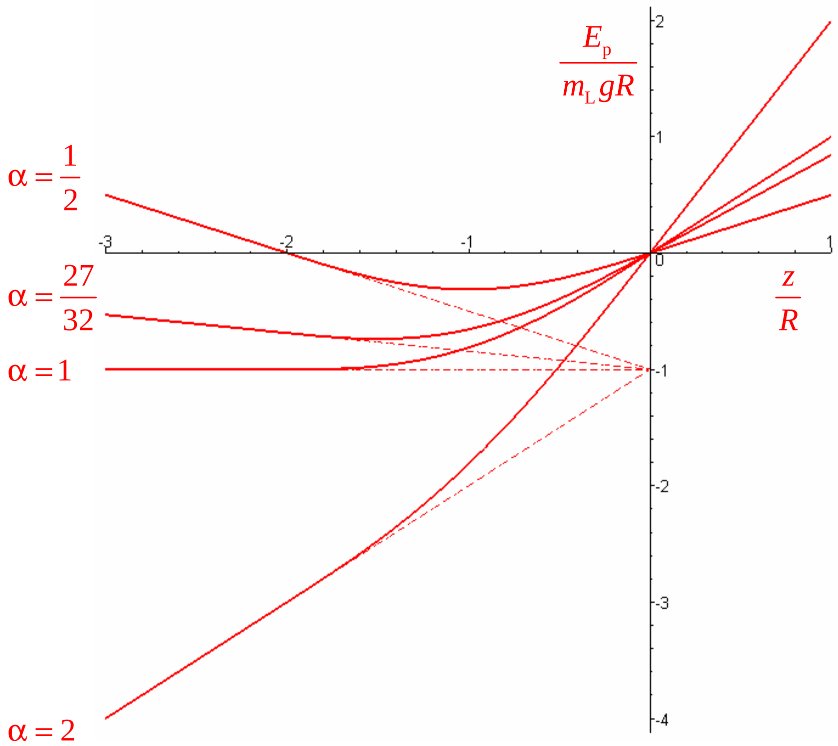
Lorsque la sphère est totalement immergée, la force d'Archimède est constante :

$$E_\mathrm{p} = -\int\left(-m_\mathrm{S}g + m_\mathrm{L}g\right)dz = m_\mathrm{L}\left(\alpha-1\right)gz + \mathrm{C^{te}} = m_\mathrm{L}\left(\left(\alpha-1\right)z - R\right)g$$

La constante doit être choisie de telle sorte que la fonction E_p soit continue pour $z=-2R$

$$E_\mathrm{p}\left(-2R\right) = m_\mathrm{L}R\left(1-2\alpha\right)g = -2m_\mathrm{L}R\left(\alpha-1\right)g + \mathrm{C^{te}} \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{C^{te}} = -m_\mathrm{L}Rg$$

16. Représenter graphiquement la fonction $E_\mathrm{p}\left(z\right)$ pour les valeurs $\alpha=2$; $\alpha=1$; $\alpha=\frac{27}{32}$ et $\alpha=0{,}5$. Commenter ces graphes. Dans quel cas la sphère est-elle susceptible d'osciller ?



Dans le cas $\alpha=2$, la sphère coule. Le cas $\alpha=1$ correspond au cas limite où la sphère immergée est en équilibre indifférent dans le fluide. Dans les deux autres cas $\alpha<1$ la sphère pourra osciller autour d'une position d'équilibre pour laquelle elle se trouve partiellement immergée.