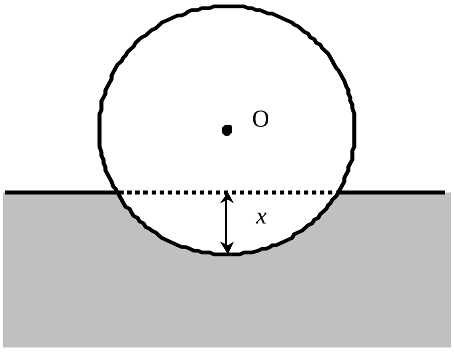
Poussée d'Archimède

On considère, dans un environnement de pesanteur uniforme $\vec{g}$, une sphère pleine homogène de rayon R et de masse volumique ρ_S et un liquide de masse volumique ρ_L. Lorsque la sphère est immergée (totalement ou partiellement), on admettra qu'elle est soumise, conformément au théorème d'Archimède, à une force de poussée verticale ascendante égale au poids du liquide déplacé, même quand elle est en mouvement. Le liquide est supposé non visqueux et on admettra que son niveau est invariant.

I- Équilibre d'une sphère solide flottant sur un liquide

La sphère flotte sur le liquide et on désigne par x la partie du diamètre vertical immergé.



1. On pose $\alpha = \dfrac{\rho_S}{\rho_L}$. Quelle sont les valeurs de α correspondant à l'immersion totale ?

   Quelle est la valeur de α correspondant à une demi-immersion ?
2. Exprimer en fonction de x le volume de la portion de sphère immergée.
3. Montrer que l'équilibre de la sphère se traduit par une relation du type :

$$b - x = \frac{c}{x^2} \qquad (1)$$

   Donner les expressions de b et c en fonction des paramètres du problème R et α.
4. Donner une solution graphique de l'équation (1) pour les trois valeurs de α suivantes : $\alpha = 1$; $\alpha = \dfrac{27}{32} \simeq 0{,}84$ et $\alpha = 0{,}5$. Commenter les résultats obtenus.

II- Déplacement d'une sphère au sein d'un liquide

La sphère est maintenant lestée de telle sorte que $\alpha > 1$. On la maintient totalement immergée près de la surface du liquide et on l'abandonne sans vitesse. On admet que l'action du liquide sur la sphère se traduit, en plus de la force d'Archimède, par une force de résistance opposée à la vitesse, de la forme :

$$\vec{f} = -k\vec{v} \qquad \text{avec} \qquad k = 4\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

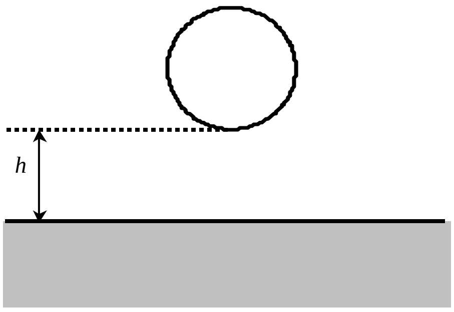
5. Décrire le mouvement de chute de la sphère en exprimant la vitesse v en fonction du temps.
6. Donner l'allure du graphe représentant les variations de v en fonction du temps.
7. Calculer la vitesse limite atteinte pour $R = 2$ cm ; $\alpha = 1{,}5$; $\rho_L = 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $g = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

8. On récupère la même sphère et on enlève une partie du lest pour ramener α à une valeur inférieure à 1. On l'enfonce profondément dans le liquide et on l'abandonne sans vitesse. On constate que le mouvement ascendant se fait alors avec pour vitesse limite la même que celle qui a été atteinte à la descente. En déduire la nouvelle valeur de α.

III- Traversée de la surface de séparation air-liquide

On néglige la viscosité de l'eau et la résistance de l'air. On considère la sphère maintenue entièrement immergée, sa partie supérieure étant tangente à la surface libre du liquide. On libère la sphère.

9. Quelle est la valeur limite de α permettant à la sphère de sortir entièrement du liquide ?
10. Calculer v_0, vitesse de la sphère quand celle-ci est entièrement hors du liquide, sa partie inférieure étant tangente à la surface de séparation liquide/air. Calculer h_1, hauteur maximale atteinte.
11. Application numérique : sphère en polystyrène $(\alpha = 0,04)$ de rayon $R = 2$ cm.
12. On place la sphère à une hauteur *h* au dessus du liquide et on lâche celle-ci sans vitesse.



Quelle est la hauteur minimale h_2 qui permet à la sphère d'être entièrement immergée ? Faire l'application numérique avec les valeurs de la question précédente et commenter ce résultat.

4- Étude énergétique

On prendra pour origine des énergies potentielles E_p la situation où la sphère est totalement hors de l'eau, sa partie inférieure étant tangente à la surface libre du liquide.

13. On repère la position de la sphère par la cote *z* de son point le plus bas, l'origine étant prise au niveau de l'eau. Déterminer la fonction énergie potentielle de la sphère lorsqu'elle est totalement hors de l'eau.
14. Même question lorsque la sphère est partiellement immergée.
15. Même question lorsque la sphère est totalement immergée.
16. Représenter graphiquement la fonction $E_\text{p}(z)$ pour les valeurs $\alpha = 2$; $\alpha = 1$; $\alpha = \frac{27}{32}$ et $\alpha = 0,5$. Commenter ces graphes. Dans quel cas la sphère est-elle susceptible d'osciller ?