Mécanique du solide. Chute d'une tartine beurrée - corrigé

1- En notant $\vec{T} = T\hat{r}$ et $\vec{N} = N\hat{\theta}$ (T et N algébriques), le théorème de la résultante cinétique s'écrit :

$$m\vec{a}_G = T\hat{r} + N\hat{\theta} + m\hat{g}$$

En projection sur $\hat{r}$: $-m\delta\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = T + mg\sin\theta$

En projection sur $\hat{\theta}$ en : $m\delta\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = N + mg\cos\theta$.

2- La tartine est un solide en rotation autour de l'axe fixe Oy. Le théorème du moment cinétique en O s'écrit :

$$J_{Oy}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = +mg\delta\cos\theta \qquad \text{soit} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{g}{a}\frac{3\eta}{1+3\eta^2}\cos\theta$$

On multiplie les deux membres par $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ pour obtenir $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right) = \dfrac{g}{a}\dfrac{3\eta}{1+3\eta^2}\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ et on intègre de pour aboutir à la relation demandée :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \omega^2 = \frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}\sin\theta = \omega_0^2\sin\theta \qquad \text{avec} \qquad \omega_0^2 = \frac{g}{a}\frac{6\eta}{1+3\eta^2}$$

3- La tartine n'étant soumise qu'à son poids, de moment nul par rapport à G, le théorème du moment cinétique au point G s'exprime ainsi : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_G}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ avec $\overrightarrow{L_G} = \overrightarrow{L^*} = \dfrac{1}{2}J_{Gy}\omega^2\hat{y}$.

La vitesse de rotation reste donc constante à la valeur ω_0 et $\theta(t) = \dfrac{\pi}{2} + \omega_0 t$.

4- Il faut que $\theta > \theta_1 = \dfrac{3\pi}{2}$ pour que la tartine retombe sur le côté non beurré (en admettant qu'elle fait moins d'un tour).

5- *Remarque*. Avec $\delta \ll a$, la chute libre de la tartine commence lorsque le point G est en O, et non pas l'extrémité de la tartine.
La valeur de τ donnée dans l'énoncé correspond à la valeur de la durée de la chute libre supposée commencer lorsque le bord de la tartine est en O, avec vitesse initiale nulle.

Application numérique : τ = 0,36 s. Le rattrapage de la tartine demande des réflexes extrêmement affutés.

6- La valeur limite de η est celle qui fait que l'angle θ a la valeur limite θ_1 à l'arrivée sur le sol. On écrit donc que $\theta = \theta_1$ au temps τ. On arrive alors à $\eta_{min} = \alpha$ (en utilisant *ici* l'approximation $\eta \ll 1$ pour écrire $\omega_0^2 = 6\eta\dfrac{g}{a}$).

Application numérique : $\eta_{min} = 0,06$; comme η est en pratique de l'ordre de 0,02, la tartine tombe du côté beurré.