Filtrage passe-bas, isolation de la composante continue - corrigé

Considérons une tension sinusoïdale redressée double alternance $u_e(t)$.

1- Déterminer la valeur efficace du signal.

La valeur efficace est la racine carré de la valeur moyenne du carré du signal. Le carré de la fonction $u_{max}\left|\sin\frac{\pi t}{T}\right|$ est le même que le carré de la fonction $u_{max}\sin\frac{\pi t}{T}$, aussi ces deux fonctions ont-elles la même valeur efficace. La valeur efficace du signal est donc, tel que pour une fonction sinisoïdale, égale à l'amplitude divisée par racine de deux :

$$U_e = \sqrt{\left\langle u_e(t)^2\right\rangle} = \frac{u_{max}}{\sqrt{2}}$$

2- Retrouver la valeur $U_{e0} = \frac{2u_{max}}{\pi}$ de la composante continue de cette tension.

La valeur moyenne est égale à l'intégrale $\left\langle u_e(t)\right\rangle = U_{e0} = \frac{1}{T}\int_{(T)} u_e(t)\,dt = \frac{1}{T}u_{max}\int_{(T)}\left|\sin\frac{\pi t}{T}\right|dt$

Nous avons tout intérêt à choisir le domaine d'intégration dans l'intervalle $0 \cdot\cdot T$ puisque sur ce domaine la trension a tout simplement pour expression $u_{max}\sin\frac{\pi t}{T}$:

$$U_{e0} = \frac{1}{T}u_{max}\int_0^T \sin\frac{\pi t}{T}\,dt = \frac{1}{T}u_{max}\left[-\frac{T}{\pi}\cos\frac{\pi t}{T}\right]_0^T = \frac{2u_{max}}{\pi}$$

Quel est le pourcentage de la puissance du signal contenue dans cette composante continue ?

La puissance totale du signal est proportionnelle au carré de sa valeur efficace. La relation de Parseval nous dit que cette puissance est la somme des puissances associées à la composante continue, au fondamental et aux harmoniques.

Pour une puissance totale $P = k\frac{u_{max}^2}{2}$ transportée par le signal, la composante continue transporte la puissance $P_0 = k\left(\frac{2u_{max}}{\pi}\right)^2$.

Le pourcentage de la puissance du signal contenue dans la composante continue est égal au rapport des deux termes :

$$\frac{P_0}{P} = \frac{\left(\frac{2u_{max}}{\pi}\right)^2}{\frac{u_{max}^2}{2}} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0{,}81 = 81\%$$

3- Retrouver l'expression $u_1(t) = -\frac{4}{3\pi}u_{max}\cos\omega t$ du fondamental de ce signal.

Le coefficient $-\frac{4}{3\pi}u_{max}$ est tout simplement le coefficient a_1 du développement en série de Fourier cosinus de cette fonction paire, soit :

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T u_{max}\sin\frac{\pi t}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T u_{max}\frac{1}{2}\left(\sin\frac{3\pi t}{T} - \sin\frac{\pi t}{T}\right)dt$$

$$a_1 = \frac{1}{T}u_{max}\left[-\frac{T}{3\pi}\cos\frac{3\pi t}{T} + \frac{T}{\pi}\cos\frac{\pi t}{T}\right]_0^T = u_{max}\left(-\frac{1}{3\pi}\cos 3\pi + \frac{1}{\pi}\cos\pi + \frac{1}{3\pi} - \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{4}{3\pi}u_{max}$$

Quel est le pourcentage de la puissance du signal contenue dans ce fondamental ?

La valeur efficace correspondante est égale au module de l'amplitude divisée par racine de deux, soit : $U_{e1} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} u_{max}$. De la même façon, le pourcentage de la puissance du signal contenue dans la composante continue est égal au rapport :

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}u_{max}}{3\pi}\right)^2}{\frac{u_{max}^2}{2}} = \frac{16}{9\pi^2} \approx 0{,}18 = 18\,\%$$

4- Quel est le pourcentage de la puissance du signal contenue dans l'ensemble des harmoniques ?

Toujours d'après la relation de Parseval, l'ensemble des harmoniques contiennent le reste de la puissance du signal, nous en déduisons :

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} P_n}{P} = \frac{P - P_1 - P_0}{P} = 1 - \frac{8}{\pi^2} - \frac{16}{9\pi^2} = 1 - \frac{88}{9\pi^2} \approx 0{,}009 = 0{,}9\,\%$$

5- Le but recherché étant d'obtenir une tension qui se rapproche le plus possible d'une tension continue, on réalise un filtrage passe-bas avec une pulsation de coupure très petite devant la « pulsation » du signal :

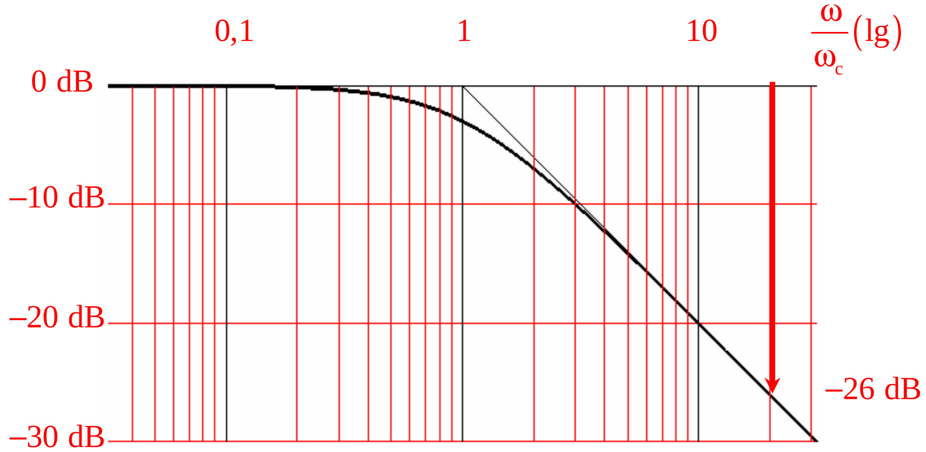
$$\omega_c \ll \frac{2\pi}{T}$$

Nous utilisons un filtre passe-bas du premier ordre dont la fonction de transfert a pour expression $H(j\omega) = \frac{1}{1 + jx}$, avec $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ et on choisit $\omega_c = \frac{1}{20}\frac{2\pi}{T}$.

Déterminer, en sortie d'un tel filtre, les pourcentages de la puissance du signal contenue dans la composante continue, dans le fondamental et dans l'ensemble des harmoniques.

La composante continue est transmise par ce filtre sans aucune modification, nous avons donc toujours $P_0 = k\left(\frac{2u_{max}}{\pi}\right)^2$.

Comme nous pouvons le lire sur le diagramme de Bode du filtre, le fondamental subit une atténuation de -26 dB.



Il s'agit tout simplement, avec une très bonne approximation, d'une division par 20 :

$$U_{s1} = \frac{U_{e1}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{30\pi} u_{max}$$

La puissance transportée par ce fondamental très atténué a donc pour expression $P_{s1} = k\left(\frac{\sqrt{2}}{30\pi}u_{max}\right)^2$

et, comme dorénavant la quasi-totalité de la puissance est portée par la composante continue, le pourcentage est donné avec une excellente approximation par le rapport :

$$\frac{P_{s1}}{P_0} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{30\pi}u_{max}\right)^2}{\left(\frac{2}{\pi}u_{max}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{60}\right)^2 = \frac{1}{1800} = 0{,}055\ \%$$

L'harmonique de rang n qui avait avant filtrage une valeur efficace $U_{en} = \frac{1}{\pi}\frac{2\sqrt{2}}{4n^2-1}u_{max}$, voit cette valeur divisée par $20n$, soit : $U_{sn} = \frac{\sqrt{2}}{10\pi n\left(4n^2-1\right)}u_{max}$

La puissance totale des harmoniques a donc pour expression :

$$\sum_{n=2}^{\infty} P_{sn} = k\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{10\pi n\left(4n^2-1\right)}u_{max}\right)^2 = \frac{k\,u_{max}^2}{50\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\left(4n^2-1\right)^2}$$

Voilà un travail que je préfère confier à MAPLE :

```
> serie:=1/n^2/(4*n^2-1)^2,n=2..infinity:
  Sum(serie)=sum(serie);
```

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\,(4\,n^2-1)^2} = -\frac{37}{9} + \frac{5\,\pi^2}{12}$$

On en déduit : $\sum_{n=2}^{\infty} P_{sn} = \frac{k\,u_{max}^2}{50\pi^2}\left(-\frac{37}{9}+\frac{5\pi^2}{12}\right)$ et, par conséquent, le pourcentage de la puissance du signal de sortie présent dans les harmoniques :

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} P_{sn}}{P_0} = \frac{1}{200}\left(\frac{5\pi^2}{12}-\frac{37}{9}\right) \approx 6\times 10^{-6} = 0{,}0006\ \%$$

C'est vraiment pas beaucoup...